ZEITSCHRIFT
FÜR
PHYSIK UND MATHEMATIK.

I.
Über Lebensversicherungen;

von
J. J. Littrow.

Die Einrichtung, durch welche Jeder seinen Nachkommen, seinen Freunden oder nächsten Verwandten eine gröſsere und mehr gesicherte Summe hinterlassen kann, als dieſs durch bloſse einfache Ersparung möglich ist, gehört ohne Zweifel zu den wohlthätigsten Erfindungen der menschlichen Gesellschaft, und es gibt kein wahrhaft gebildetes Volk der neueren Zeiten, das nicht auf dieselben seine besondere Sorgfalt verwendet hätte. Die vorzüglichsten unter diesen Einrichtungen sind die sogenannten Witwen- und Waisen-Anstalten, die den rechtlichen Mann, den Gatten und den Vater, die beiden Hauptmomente der menschlichen Gesellschaft, in unmittelbaren Anspruch nehmen, und indem sie der Verarmung der Familien und der Vernachlässigung der Erziehung entgegen arbeiten, die zwei vorzüglichsten Quellen der Demoralisation des Volkes verstopfen, und daher, weit entfernt, als eine bloſse Privatsache betrachtet zu werden, vielmehr als eine öffentliche, das Gesammtwohl betreffende Angelegenheit behandelt werden sollten. So wie aber diese Institute unter allen Versorgungsanstalten die wichtigsten sind, so sind sie auch ohne Zweifel die complicirtesten, und

eben dadurch die unsichersten, da sie von dem Leben zweier, die Waisenanstalten sogar von dem Leben dreier Menschen abhängen, deren der eine gewöhnlich ein sehr jugendliches Alter hat, für welches letzte alle unsere Sterblichkeitstafeln gewiſs noch sehr groſser Verbesserungen bedürfen. Vielleicht liegt darin einer der Gründe, welche diese Institute, wenigstens bei uns, so sehr gefährden, daſs sie gewöhnlich schon in ihren ersten Jahren ein sieches Leben führen, und ihrer nur zu frühen Auflösung so schnell entgegen eilen.

Anders verhält es sich mit den sogenannten Lebensversicherungs-Anstalten, die nur von dem Leben einer einzigen Person abhängen, und bei welchen daher die Berechnungen viel einfacher, und die Ausführung zugleich viel sicherer ist. In dem practischen England haben diese Life-Assurances alle anderen Anstalten dieser Art gleichsam verdrängt, und bloſs in London zählt man derselben bereits über vierzig, von welchen viele mehrere Tausende von Mitgliedern zählen, und über sehr beträchtliche Summen disponiren. So besitzt die Crown-Society ein Stammcapital von 10 Millionen unserer Silbergulden, die Rock- und Guardian-Society 20 Millionen, und die Alliance 50 Millionen. Mehrere von ihnen bestehen schon seit einer groſsen Reihe von Jahren, und erfreuen sich noch immer ihres Wohlstandes und des mit jedem Jahre wachsenden Vertrauens ihrer Committenten. So ist die Equitable Society bereits 70, die Royal Exchange 109, die Union 117, und die Amicable-Society 125 Jahre alt, und sie gehören noch jetzt zu den besten Anstalten dieser Art, die man in England in so groſser Anzahl hat. Bei uns im Gegentheile ist diese Gattung von Versorgungsanstalten noch beinahe gänzlich unbekannt, daher es vielleicht Manchen nicht unwillkommen seyn mag, sie hier näher erwähnt

zu finden, wobei ich mich übrigens auf die Hauptsache, auf die Berechnung dieser Anstalten, beschränke, und die übrigen mehr der practischen Ausführung angehörenden Einrichtungen einem anderen Orte vorbehalte.

Die wesentliche Einrichtung dieser Institute, wodurch sie sich vor den übrigen Versorgungsanstalten unterscheiden, besteht darin, dafs die Casse bei dem Tode des Mitgliedes eine *bestimmte Summe als Capital*, also nur ein Mal, aber ohne Ausnahme, *bezahlen müſs*, während sie z. B. bei Pensionen für Witwen und Waisen eine bestimmte Summe *jährlich* zahlt, und nur an eine *bestimmte Person* zahlt, und, wenn diese Person vor der Zeit stirbt, gar nichts zahlt, u. s. w. In den Lebensversicherungs-Anstalten im Gegentheile erhält Derjenige, der den von der Casse gegebenen Versicherungsschein bei dem Tode des Mitgliedes vorlegt, die in dem Vertrage festgesetzte Summe als Capital in einer einmaligen Zahlung; dieser Vorzeiger mag die Witwe, oder der Sohn, oder irgend ein Freund des Verstorbenen seyn.

Es wird wohl nicht nothwendig seyn, die groſsen Vortheile einer solchen Einrichtung umständlich aus einander zu setzen. Die Absicht der Mitglieder, die in eine solche Gesellschaft treten, ist: bei ihrem Tode ihren Nachgelassenen eine bestimmte Summe als Capital zu versichern, durch welches sie, entweder im Ankaufe von Gütern oder auf dem Wege der Zinsen, ihren künftigen Unterhalt erleichtern können. Man kann sich leicht überzeugen, daſs eine auf diese Weise begründete Summe viel gröſser und zugleich viel sicherer ist, als sie durch gewöhnliche, jährlich zu diesem Zwecke zurückgelegte Ersparungen seyn würde. Um dieses durch ein Beispiel zu zeigen, nehmen wir an, ein $m$jähriger Mann habe die jährliche Besoldung von A Gulden; er will sich aber mit der kleineren Summe von A' Gulden begnügen, und

den Rest $A - A'$ als jährlichen Beitrag in die Anstalt geben, um dadurch seiner Familie bei seinem Tode ein Capital zu verschaffen, dessen jährliche Zinsen den n^{ten} Theil seiner eigenen von ihm selbst reducirten Besoldung, oder dessen jährliche Zinsen $\frac{1}{n} A'$ betragen sollen.

Die unten folgende Tafel gibt den jährlichen Beitrag a, welchen das Mitglied an die Casse zu leisten hat, um seiner Familie bei seinem Tode das Capital von 100 Gulden zu versichern.

Dieſs vorausgesetzt, findet man leicht, daſs die reducirte jährliche Besoldung des Mitgliedes

$$A' = \frac{n \rho A}{a + n \rho},$$

und daſs daher sein jährlicher Beitrag

$$A - A' = \frac{A a}{a + n \rho}$$

ist, wo ρ den Zins von Hundert bezeichnet.

Ein dreiſsigjähriger Mann z. B. mit einer Besoldung von 1000 fl., für den $n = 1$, $\rho = 5$, und nach der Tafel $a = 2.5$ ist, wird, wenn er sich jährlich 333 fl. abbricht, seiner Familie bei seinem Tode ein Capital von 13333 fl. versichern, von welchen die jährlichen Interessen 667 fl., also genau so viel betragen, als seine eigene reducirte Besoldung betrug, so daſs seine Nachkommen durch seinen Tod keine Änderung in ihrem Einkommen leiden.

Ist $n = 2$, oder will er seiner Familie ein Capital hinterlassen, dessen jährliche Zinsen gleich der Hälfte seiner gegenwärtigen reducirten Besoldung betragen, so wird er sich mit jährlich 800 fl. begnügen, und den jährlichen Beitrag von 200 fl. in die Casse geben, wodurch er ein Capital von 8000 fl. begründet, dessen jährliche Interessen 400 fl. geben, u. s. w.

Diese groſsen Vortheile gegen gewöhnliche zurück-

gelegte Ersparungen sind um so bedeutender, da sie von den besonderen, das Leben dieses einzelnen Mitgliedes gefährdenden Umständen ganz unabhängig sind, und selbst schon in dem ersten Jahre nach dem Eintritte desselben in die Gesellschaft erworben werden können, während jene Ersparungen aufser der Gesellschaft ein langes Leben des Mannes als Hauptbedingung voraussetzen.

* * *

Sey m das Alter und A_m die diesem Alter entsprechende Zahl der, von einer gegebenen Menge zugleich gebornen Menschen, in diesem Alter noch lebenden Personen aus irgend einer der besseren Mortalitätstafeln. In der bekannten *Baumann*'schen Tafel, die wir hier zu Grunde legen, ist z. B. $A_{20} = 491$, $A_{30} = 439$, $A_{40} = 374$ u. s. w. Der Kürze wegen sey ferner

$$E_m = \frac{1}{r^{m-1}}\left[\frac{A_m}{r} + \frac{A_{m+1}}{r^2} + \frac{A_{m+2}}{r^3} + \frac{A_{m+3}}{r^4} + \ldots\right]$$

wo r den Zinsfufs bezeichnet, z. B. $r = 1.04$ für 4 pCt., und wo diese Reihe so weit fortgesetzt wird, bis die Glieder A_x, A_{x+1}, A_{x+2}, ... der Mortalitätstafel verschwinden.

Setzt man aber diese Reihe nur bis $\frac{A_{m+p}}{r^{p+1}}$ fort, so hat man, wie man aus dem Ausdrucke für E_m findet:

$$\frac{1}{r^{m-1}}\left(\frac{A_m}{r} + \frac{A_{m+1}}{r^2} + \frac{A_{m+2}}{r^3} + \ldots + \frac{A_{m+p-1}}{r^p}\right) = E_m - E_{m+p}.$$

Eine Tafel, welche für jeden Werth von m den Werth von E_m gibt, wird alle folgenden Rechnungen ungemein erleichtern. Endlich sey der Kürze wegen

$$D_m = E_m - E_{m+1}.$$

Diese wenigen und einfachen Bezeichnungen werden uns in den Stand setzen, die folgende allgemeine

Aufgabe aufzulösen, welche alle Fragen umfaſst, die für solche Lebensversicherungs-Anstalten aufgestellt werden können.

Eine Person in dem Alter von m Jahren tritt in eine solche Anstalt, und erlegt gleich anfangs das Antrittsgeld α, und dann noch jährlich den jährlichen Beitrag β. Dafür verlangt sie, daſs bei ihrem Tode ihren Erben von der Casse die Versicherung γ als Capital ausgezahlt werde. Es werden aber dabei folgende Bedingungen gemacht: 1) Wenn das Mitglied vor den ersten p Jahren nach seinem Eintritt schon stirbt, so zahlt die Casse nichts. (Dieſs sind die sogenannten p Probejahre, durch welche sich manche Institute vor dem Nachtheile eines zu frühen Todes ihrer Mitglieder sichern wollen.) 2) Die erwähnten jährlichen Beiträge soll das Mitglied nicht bis an seinen Tod, sondern nur die ersten q Jahre entrichten. (Dieſs hat den Zweck, zu groſse, und den Meisten lästige Antrittsgelder zu vermeiden, und auch den Mitgliedern in ihren alten Tagen ihre Pflichten zu erleichtern.) 3) Wenn das Mitglied von seinem Eintritte an noch mehr als $p+t$ Jahre am Leben bleibt, so soll die Verbindlichkeit der Casse ebenfalls wegfallen, oder die Casse hat an so alte Leute nichts zu zahlen. (Weil mancher Mann wünschen kann, daſs seine Familie nur die ersten 10, 20 oder 30 Jahre bei seinem Tod versichert werde, da er, wenn er länger lebt, durch die gewisse Aussicht auf eine höhere Besoldung oder auf eine zu machende Erbschaft sich in den Stand gesetzt sieht, seine Nachkommen ohne Hülfe der Anstalt selbst zu versorgen.) 4) Endlich wollen wir noch voraussetzen, daſs die Anstalt für ihre Geschäftsführung, für die Besoldung ihrer Beamten u. d. gl. für jedes Mitglied jährlich die Summe δ ausgeben müsse.

Wir müssen nun suchen, wie, den aufgestellten

Bedingungen gemäſs, die vier Gröſsen α, β, γ, δ von einander abhängen, von welchen die beiden ersten zu den Einkünften, und die beiden letzten zu den Ausgaben der Casse gehören.

Betrachten wir zuerst die *Einnahme* der Casse.

Nach den bekannten Gründen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die hier vorausgesetzt werden können, hat man für den Werth aller Zahlungen dieses Mitgliedes, auf die Zeit seines Eintrittes reducirt, den Ausdruck

$$\alpha + \frac{\beta}{A_m}\left(\frac{A_{m+1}}{r} + \frac{A_{m+2}}{r^2} + \frac{A_{m+3}}{r^3} + \ldots + \frac{A_{m+q}}{r^q}\right),$$

oder nach unserer Bezeichnung

$$\alpha + \frac{\beta \cdot r^m}{A_m}(E_{m+1} - E_{m+q+1}).$$

Es war aber

$$D_m = E_m - E_{m+1} \text{ und } r^{m-1} E_m = \frac{A_m}{r} + r^{m-1} E_{m+1},$$

also ist auch

$$D_m = \frac{A_m}{r^m},$$

und daher die auf den Eintritt reducirte Einnahme der Casse

$$\alpha + \frac{\beta}{D_m}(E_{m+1} - E_{m+q+1}).$$

Dieſs setzt voraus, daſs die jährlichen Beiträge β immer nur *am Ende* eines jeden Jahres bezahlt werden. Sollen sie aber schon *im Anfange* jedes Jahres entrichtet werden, so geht die letzte Gleichung in folgende über:

$$\alpha + \frac{\beta}{D_m}(E_m - E_{m+q}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I.)$$

Wir gehen nun zu den *Ausgaben* der Casse über. Die Ausgabe δ wegen den Auslagen der Anstalt für jedes Mitglied gehen bis an den Tod des Mitgliedes, und betragen daher, ebenfalls auf die Zeit des Eintritts re-

ducirt, die Summe

$$\frac{\delta}{A_m}\left(\frac{A_{m+1}}{r}+\frac{A_{m+2}}{r^2}+\frac{A_{m+3}}{r^3}+\ldots\right), \text{ oder kurz } \delta\,.\,\frac{E_{m+1}}{D_m} \quad \text{(II.)}$$

Um aber noch den Werth der Zahlungen γ bei dem Tode der Mitglieder zu finden, so hat man von einer Anzahl M von Mitgliedern, die bei ihrem Eintritte alle m Jahre alt waren, am Ende der ersten p Jahre noch Lebende

$$\frac{A_{m+p}-A_{m+p+1}}{A_m}\,.\,M,$$

am Ende der ersten $(p+1)$ Jahre

$$\frac{A_{m+p+1}-A_{m+p+2}}{A_m}\,.\,M, \text{ u. s. f.},$$

und endlich am Ende des $(p+t-1)^{\text{ten}}$ Jahres, wo die Zahlungen aufhören:

$$\frac{A_{m+p+t-1}-A_{m+p+t}}{A_m}\,.\,M.$$

Daraus folgt, daſs der auf den Anfang reducirte Werth aller dieser Zahlungen für M Mitglieder ist

$$\frac{A_{m+p}-A_{m+p+1}}{r^{p+1}A_m}\,.\,M\gamma+\frac{A_{m+p+1}-A_{m+p+2}}{r^{p+2}A_m}\,.\,M\gamma$$
$$+\frac{A_{m+p+2}-A_{m+p+3}}{r^{p+3}A_m}\,.\,M\gamma+\ldots+\frac{A_{m+p+t-1}-A_{m+p+t}}{r^{p+t}A_m}\,.\,M\gamma,$$

und daſs daher dieser Werth für *ein* Mitglied seyn wird

$$\frac{\gamma}{r^p A_m}\left[\frac{A_{m+p}}{r}+\frac{A_{m+p+1}}{r^2}+\ldots+\frac{A_{m+p+t-1}}{r^t}\right],$$
$$\frac{-\gamma}{r^p A_m}\left[\frac{A_{m+p+1}}{r}+\frac{A_{m+p+2}}{r^2}+\ldots+\frac{A_{m+p+t}}{r^t}\right],$$

oder nach unserer eingeführten Bezeichnung

$$\frac{\gamma}{r D_m}\left[E_{m+p}-E_{m+p+t}\right]-\frac{\gamma}{D_m}\left[E_{m+p+1}-E_{m+p+t+1}\right]\,.\quad \text{(III.)}$$

Da nun, wenn die Anstalt bei ihren Mitgliedern, wie es gefordert wird, weder Verlust noch Gewinn ha-

ben soll, die Einnahme (I.) gleich der Ausgabe (II.) und (III.) seyn soll, so hat man die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \frac{\beta}{D_m}(E_m - E_{m+q}) = \\ = \frac{\gamma}{D_m}\left[\frac{1}{r}(E_{m+p} - E_{m+p+t}) - (E_{m+p+1} - E_{m+p+t+1})\right] \\ + \frac{\delta . E_{m+1}}{D_m}, \end{aligned}\right\} \text{(IV.)}$$

und diese Gleichung enthält die vollständige Auflösung der oben aufgestellten Aufgabe.

Um diejenigen besonderen Fälle, welche bei diesen Anstalten vorzukommen pflegen, besonders zu betrachten, werden wir nur die in dieser Gleichung enthaltenen Gröſsen diesen Fällen gemäſs abändern. Wir wollen einige derselben besonders anführen.

Wenn die Mitglieder kein Antrittsgeld, sondern bloſs jährliche Beiträge entrichten, so ist in der Gleichung (IV.) die Gröſse $\alpha = 0$.

Wird aber bloſs das Antrittsgeld ohne jährliche Beiträge entrichtet, so ist $\beta = 0$.

Werden die jährlichen Beiträge von dem Eintritte bis an den Tod des Mitgliedes bezahlt, so ist in der Gleichung (IV.) die Gröſse $E_{m+q} = 0$.

Werden bloſs diejenigen Mitglieder, welche ihn p Probejahre noch nicht überlebt haben, ausgeschlossen, und bekommen *alle* übrigen, auch die nach $p+t$ Jahren noch Lebenden, die Summe γ, so ist die Gröſse $E_{m+p+t} = E_{m+p+t} = 0$.

Werden keine Probejahre eingeführt, sondern wird das Capital bei dem Tode eines jeden Mitgliedes ohne Ausnahme gezahlt, so ist $p = 0$.

Soll die Versicherung γ erst in dem Jahre zahlbar zu werden anfangen, in welchem die jährlichen Beiträge β der Mitglieder aufhören, so ist $p = q$ und so fort für

andere Fälle. Aus diesen Betrachtungen folgen eine grofse Anzahl von Problemen, von denen wir nur die vorzüglichsten kurz anzeigen.

I. *Partielle Versicherung* für q Jahre.

Die Mitglieder entrichten blofs den jährlichen Beitrag β durch q Jahre, ohne Antrittsgeld, ohne Probejahre und ohne Ausschlufs der älteren Glieder. Dafür fordern sie, wenn sie noch vor diesen q Jahren sterben, für ihre Erben die Summe γ. Wenn sie aber diese q Jahre überleben, hat die Casse nichts zu zahlen.

Dieser Fall kann eintreten, wenn die Mitglieder die Aussicht haben, nach q Jahren eine höhere Besoldung oder eine Erbschaft zu erhalten.

Die Gleichung (IV.) gibt $\alpha = p = 0$ und $q = t$. Setzt man also $\delta = 0$, so hat man

$$\beta = \frac{\gamma}{r} \cdot \frac{(E_m - E_{m+q}) - r\,(E_{m+1} - E_{m+q+1})}{E_m - E_{m+q}}.$$

Setzt man in dieser Gleichung $q = 7$ und $\gamma = 100$ Gulden $r = 1.04$, und legt man die *Baumann*'sche Mortalitätstafel zu Grunde, so gibt die Columne I. der unten folgenden Tafel die jährlichen Beiträge, die eine 15, 20, 25, . . . bis 70jährige Person zu entrichten hat, um bei ihrem Tode eine Summe von 100 Gulden zahlbar zu machen.

II. Ist $q = 1$, so wird diese Gleichung

$$\beta = \frac{\gamma}{r} - \gamma \cdot \frac{D_{m+1}}{D_m},$$

d. h. wer diese Summe β erlegt, erhält, wenn er noch vor dem Ende des ersten Jahres stirbt, die Summe γ. Die Columne II. gibt den Werth von β für $\gamma = 100$ und $r = 1.04$.

III. *Totale Versicherung durch immerwährende Beiträge.*

Die Mitglieder entrichten den jährlichen Beitrag β

bis an ihren Tod ohne Antrittsgeld und ohne Probejahre, und fordern dafür bei ihrem Tode die Summe γ.

Hier ist die Gleichung (IV.), da $\alpha = p = 0$, $E_{m+q} = 0$ und $E_{m+p+t} = 0$ ist,

$$\beta = \gamma \cdot \frac{(E_m - r \cdot E_{m+1})}{r E_m}.$$

Die Columne III. gibt diese Beiträge für $\gamma = 100$ und $1 = 1.04$.

IV. *Totale Versicherung durch Antrittsgeld.*

Die Mitglieder entrichten blofs das Antrittsgeld α ohne jährliche Beiträge und ohne Probejahre, und erhalten bei ihrem Tode das Capital γ.

Hier ist $\beta = p = 0$ und $E_{m+p+t} = 0$, also wird die Gleichung (IV.)

$$\alpha = \frac{\gamma}{r} \cdot \frac{E_m - r E_{m+1}}{D_m}.$$

Die Columne IV. gibt dieses Antrittsgeld für $\gamma = 100$ und $\gamma = 1.04$.

V. *Totale Versicherung durch aufhörende Beiträge.*

Die Mitglieder entrichten den jährlichen Beitrag β, aber nur in den ersten q Jahren, ohne Antrittsgeld und ohne Probejahre, und die Casse zahlt bei dem Tode des Mitglieds das Capital γ.

Hier ist $\alpha = p = 0$ und $E_{m+p+t} = 0$, also die Gleichung IV.

$$\beta = \frac{\gamma}{r} \cdot \frac{E_m - r E_{m+1}}{E_m - E_{m+q}}.$$

Die vier Columnen V. der Tafel geben diesen 3, 5, 7 und 10jährigen Beitrag für $\gamma = 100$ und $r = 1.04$.

Alter m.	I. Par-tiell für 7 Jahre.	II. Par-tiell für 1 Jahr.	III. Totale Beiträge	IV. Totales Antritts-geld.	V. Totale aufhörende Beiträge. 3 Jahre.	5 Jahre.	7 Jahre.	10 Jahre.
15	0.82	0.75	1.53	28.42	9.9	6.2	4.6	3.5
20	1.01	0.98	1.77	31.57	11.1	6.9	5.2	3.9
25	1.18	1.02	2.04	34.66	12.1	7.6	5.8	4.3
30	1.43	1.29	2.37	38.13	13.4	8.4	6.4	4.8
35	1.73	1.65	2.77	41.86	14.7	9.3	7.1	5.3
40	1.94	1.80	3.22	45.56	15.6	9.9	7.7	5.7
45	2.46	1.99	3.84	49.97	17.6	11.3	8.6	6.6
50	3.15	2.88	4.63	54.63	19.5	12.5	9.5	7.4
55	3.77	3.37	5.55	59.08	21.3	13.7	10.6	8.2
60	5.16	4.12	6.90	64.55	23.1	15.2	11.8	9.5
65	7.00	5.94	8.58	69.02	25.0	16.8	13.4	10.9
70	9.04	7.69	10.46	73.15	27.3	18.9	15.2	12.4

Diese Tafeln reichen hin, um der Errichtung einer solchen Anstalt zu Grunde gelegt zu werden, da für jedes gröſsere Capital γ als 100 Gulden das Antrittsgeld oder die Beiträge in demselben Verhältnisse vergröſsert werden. Die Gröſse δ läſst sich nach den individuellen Einrichtungen eines jeden Institutes nicht allgemein bestimmen, daher sie hier übergangen werden muſste. Man kann bemerken, daſs sie bei den meisten Anstalten die Zahlen dieser Tafeln kaum merklich ändern wird, und daſs endlich, wenn man $\gamma = 0$ setzt, das letzte Glied $\frac{\delta \cdot E_{m+1}}{D_m}$ die sogenannten Lebensrenten bezeichnet, welche dem Mitgliede selbst, für seine Leistung an die Casse, bis an seinen Tod von derselben entrichtet werden.

II.

Beurtheilung der Fehler, welche man bei Messung der Krystallwinkel mittelst der Reflexionsgoniometer von *Wollaston* und *Malus* begeht;

von

Julius Weisbach.

Es ist in der practischen Geometrie und Astronomie ein Gegenstand von der gröſsten Wichtigkeit, die Fehler beim Winkelmessen zu beurtheilen und zu vermindern, und, wenn es angeht, sie wohl gar zu vermeiden; denn da man, den Unvollkommenheiten unserer Sinneswerkzeuge und unserer Meſsinstrumente wegen, bei jeder Messung Fehler begeht, so besteht der Werth einer jeden Messung nur darin, daſs man die Grenzen, über welche die begangenen Fehler nicht hinausgehen, angeben könne, und daſs diese Grenzen nicht zu weit seyen.

Da nun die Bestimmung der naturhistorischen Species in der Mineralogie ganz besonders auf der Verschiedenheit der Krystallwinkel beruht, so ist die Beurtheilung der Fehler beim Messen der Krystallwinkel ein nicht minder wichtiger Gegenstand. Das *Romé de l'Isle'*-sche Gesetz, daſs die Krystallwinkel, bei allen übrigen Unregelmäſsigkeiten der Krystalle, immer constant bleiben, hat, in der gröſsten Strenge genommen, keine Giltigkeit, denn es gibt Varietäten einer und derselben Species, deren Winkel auffallend verschieden sind. Dieſs sind jedoch nur kleine Abweichungen von einem und demselben Normalwinkel, welche nur von zufälligen Ursachen, vielleicht von den Anziehungen der umgeben-

den Mineralmassen, oder von zufälligen Beimischungen herrühren. Sie sind mit den Abweichungen der Planetenbahnen von den Ellipsen zu vergleichen, welche von den Anziehungen anderer Himmelskörper, als der Sonne, herrühren. Die Normalgestalt der Planetenbahnen bleibt denn doch eine Ellipse, und wenn man sie aufser Acht lassen wollte, würde man den sichern Weg bei der Betrachtung derselben eben so verlieren, als es bei der Bestimmung der naturhistorischen Species der Fall ist, wenn man den Zusammenhang aller derjenigen Varietäten einer Species dadurch aufhebt, dafs man sie zur besonderen Species macht, weil sie in ihren Winkeln ein wenig abweichen.

Es scheint hieraus hervorzugehen, dafs zur Bestimmung der naturhistorischen Species eine sehr grofse Schärfe der Krystallwinkel nicht geradezu nothwendig sey; bedenkt man aber, dafs unsere Reflexionsgoniometer auch gar nicht dazu geeignet sind, die Winkel sehr scharf zu messen, und dafs man selbst, wie in den vorliegenden Untersuchungen dargethan werden wird, bei einer nur einiger Mafsen unachtsamen Messung um viele Minuten fehlen kann, so folgt daraus, dafs man alle Aufmerksamkeit auf die Verminderung und Vermeidung der Fehler verwenden kann, ohne noch die Abweichungen von der Normalform zu entdecken.

Obgleich in den neuern Zeiten Mehreres über das Messen der Krystallwinkel geschrieben worden ist, so enthält doch keine dieser Schriften eine genaue Beurtheilung der Fehler, welche bei demselben Statt finden. Selbst Herr Professor *Kupffer* handelt diesen Gegenstand in der gekrönten Preisschrift über die genaue Messung der Winkel an Krystallen nur oberflächlich ab, indem er den Unterschied der veränderlichen und derjenigen Fehler, welche selbst bei der Multiplication der Beob-

achtungen constant bleiben, nicht beachtet. Die Fehler, welche dadurch entstehen, daſs die zu messende Kante mit der Axenlinie des Instrumentes nicht zusammenfällt, bleiben, man mag den Winkel so oft messen als man will, immer dieselben, und daſs sie nicht so unbedeutend sind, werden die folgenden Untersuchungen beweisen. Nur die veränderlichen Fehler sind es, auf welche man die Multiplication der Beobachtungen und die Wahrscheinlichkeitsrechnung anwenden kann, denn nur diese werden dadurch verkleinert.

Ich habe in der vorliegenden Arbeit eine vollständige Beurtheilung der Fehler beim Winkelmessen mit den Reflexionsgoniometern von *Wollaston* und *Malus* versucht, und dabei Regeln und Mittel angegeben, mit Hülfe deren man Fehler vermeiden, oder wenigstens vermindern kann. Die Instrumente sind dabei in ihrer Einfachheit geblieben, auch glaube ich nicht, daſs man durch zusammengesetztere Instrumente bedeutend schärfer werde messen können. Es ist übrigens kein Mangel der Reflexionsgoniometer, daſs man mit ihnen die Winkel von *matten* Krystallflächen nicht messen kann, denn die matten Krystallflächen sind rauh, bilden also keine vollkommenen Ebenen, und sind daher schon an und für sich keiner genauen Messung fähig.

Die Beschreibung der Instrumente habe ich unterlassen, weil man sie in jedem ausführlichen Werke über Physik, und selbst in manchen Werken über Mineralogie findet.

Endlich ist noch zu bemerken, daſs die Figuren nicht proportionirt gezeichnet werden konnten, weil sonst die Fehler nicht in die Augen gefallen wären.

Das Goniometer von *Wollaston.*

§. 1. Es sey *Q* (Fig. 18) ein von einem horizontalen und einem verticalen Faden gebildetes Kreuz von beiläufig 2 Fuſs Höhe und eben so viel Breite. In der durch dieses Fadenkreuz gelegten Ebene liege senkrecht darunter ein zweites Kreuz *N*, parallel mit dem vorigen, von derselben Dicke und etwas mehr Höhe und Breite. Die Verticallinie *QN* sey in *P* halbirt, und durch *P* gehe eine gegen die Fadenkreuzebene senkrecht gerichtete Horizontallinie *HRP.* Durch einen Punct *C* dieser Linie gehe die zu messende, horizontal und mit der Fadenkreuzebene parallel liegende Kante. Endlich sey *ECF* der zu messende Winkel, d. h. derjenige Winkel, dessen Schenkel auf der gedachten Kante senkrecht stehen.

Um diesen Winkel zu messen, muſs zuvörderst der eben angegebenen Bedingung Genüge geleistet, nämlich die zu messende Kante horizontal und mit der Fadenkreuzebene parallel gerichtet werden. Zu diesem Zwecke ist zunächst die Ebene des Instrumentes in die Nähe und parallel mit der durch *HR* gehenden Verticalebene zu stellen, welches mit Hülfe einer Libelle und eines Bleiloths sehr leicht geschieht. Ist dieſs geschehen, so befestige man den Krystall, dessen Winkel man messen will, auf die hervorragende Axe des Instrumentes, oder auf einen daran angebrachten Apparat mittelst Wachs, daſs die zu messende Kante mit der verlängerten Axenlinie des Instrumentes zusammen falle, so genau, als sich dieſs durch das Augenmaſs thun läſst. Jetzt bringe man das Auge in die Stellung *O*, nämlich über die Horizontalebene *HR*, in die Nähe und auf die linke Seite des aufgeklebten Krystalls. Hierauf drehe man die Axe des Instrumentes mit dem darauf befestigten Krystalle so lange, bis das Bild vom Puncte *Q* mit dem Puncte *N*

im Auge zusammen fällt. Endlich drücke man das Wachs mit dem Krystalle so lange hin und her, bis auch beide Kreuze einander vollkommen decken. Hat man aber den Krystall auf dem gedachten Apparat befestigt, so geschieht diese Stellung mit Hülfe dieses Apparates. Die Vorrichtung mit der Nuſs, wie man sie bei allen Meſstischen findet, ist dem gewöhnlichen Apparate wegen der sicherern und feinern Stellung vorzuziehen.

Hat man dieſs so weit gebracht, so ist man gewiſs, daſs wenigstens die Krystallfläche CF auf der Ebene des Instrumentes, also auch auf der durch HR gelegten Verticalebene, senkrecht steht. Es ist nämlich ein aus der Katoptrik bekannter Satz: daſs der zurückgeworfene Lichtstrahl FO und der einfallende QF in einer auf der spiegelnden Fläche CF senkrechten Ebene liegen. Nun ist aber QFN eine Verticalebene, und OFN eine gerade Linie, folglich auch OFQ eine, und zwar durch HR gehende Verticalebene, und hieraus folgt denn, daſs die spiegelnde Fläche CF auf jener durch HR gehenden Vertikalebene, daher auch auf der mit ihr parallel gehenden Ebene des Instrumentes, senkrecht steht.

Dasselbe thue man nun auch in Beziehung auf die Fläche CE. Und ist beim Stellen dieser Fläche die erstere nicht aus ihrer Lage gekommen, welches man jederzeit wieder zu untersuchen hat, so wird unsere Absicht erreicht, nämlich die Kante C senkrecht gegen die Ebene des Instrumentes gestellt seyn.

Jetzt erst kann man zur Messung selbst schreiten. Man bringe zu diesem Zwecke das Auge abermals nach O, und drehe die Axe mit dem Krystalle so lange, bis beide Kreuze einander vollkommen decken. Da der Einfallswinkel QFf dem Ausgangswinkel OFC, und dieser seinem Scheitelwinkel NFf gleich ist, so folgt daraus, daſs Ff den Winkel QFN halbirt. Dieſs thut aber

auch die Horizontale *HR*, weſshalb die spiegelnde Fläche ebenfalls horizontal liegen muſs. Nun drehe man das ganze Instrument in der Richtung *HZR* so lange, bis sich in dem Auge *O′* das von der Fläche *CE* zurückgeworfene Bild von *Q* mit *N* deckt. Auch in diesem Falle wird die spiegelnde Fläche *EC* die horizontale Lage angenommen haben. Bei der Drehung ist *E* nach *E′* gekommen, man hat also das Instrument um den Winkel *ECE′* gedreht. Es ist aber *ECF* der zu messende Winkel und $E'CE + ECF = 180°$, folglich der zu messende Winkel zweien rechten Winkeln weniger dem Drehungswinkel gleich. Theilt man nun den Rand des Instrumentes von 180 Graden an rückwärts ein, so wird der Vernier den Winkel unmittelbar angeben.

Ein Hauptvortheil bei der hier angegebenen Stellung der beiden Kreuze ist der, daſs man auch groſse Krystalle richtig messen kann, wenn sie nur die erforderliche Glattheit der Flächen besitzen, weil es ganz gleichgültig ist, nach welchen Puncten der spiegelnden Flächen man sieht.

§. 2. Es sey in Figur 19 alles wie vorhin, nur mit der Ausnahme, daſs das Kreuz *N* dem Centrum näher gerückt sey, und daſs man in einer durch *C* gehenden Richtung nach *N* sehe. Dieſs letztere ist jedoch eine Voraussetzung, welcher nicht Genüge geleistet werden kann; denn da das Bild des Kreuzes *Q* einen bestimmten Raum von *CF* einnimmt, so muſs dessen Mittelpunct zwischen *C* und *F* liegen. Kleine Krystalle, welche sich wegen der Glattheit ihrer Flächen zur Messung mit dem Reflexionsgoniometer besonders eignen, leisten dieser Bedingung mehr Genüge, als groſse.

Was die senkrechte Stellung der zu messenden Kante anbelangt, so bleibt dieses Verfahren wie vorhin, wenn nur der Punct *N* die Verticalebene durch *HR*

nicht verlassen hat. Eben so verfahre man beim Messen selbst auf die oben angegebene Weise. Es wird aber hierbei die spiegelnde Fläche *CF* nicht die horizontale Lage, sondern eine Lage annehmen, welche den Winkel *QCN* halbirt. Dreht man nun das Instrument in der Richtung *HZR* so weit um, bis sich das von der andern spiegelnden Fläche *CE* zurückgeworfene Bild vom Kreuze *Q* mit dem Kreuze *N* deckt, so muſs, da *C* die Lage nicht verändert hat, *CE* in der Verlängerung von *FC* liegen, also der zu messende Winkel *ECF* ebenfalls die Ergänzung des Umdrehungswinkels zu zwei Rechten seyn.

Anders ist es, wenn man nach andern Puncten *F*, *E* der spiegelnden Flächen visirt; denn wenn man erstens nach *F* sieht, so wird, wenn *QFN* durch *CF* halbirt werden soll, *CF* noch ein wenig in der Richtung *RTH* gedreht werden müssen, weil in der Richtung, wie hier, *QFC* gröſser als *NFC* ist. Sieht man zweitens nach dem Puncte *E′* der spiegelnden Fläche *CE*, so wird man umgekehrt das Instrument in der Richtung *HTR* noch um einen kleinen Winkel umdrehen müssen, damit der gröſsere Winkel *QE′C* dem kleinern *NE′C* gleich werde. Wollte man dennoch die oben angegebene Differenz dem in Frage stehenden Winkel *ECF* gleich setzen, so würde man einen Fehler begehen, der um so bedeutender ausfällt, je breiter die spiegelnden Flächen sind, je kleiner *CM*, und je gröſser *MN* ist. Da man nämlich den Umdrehungswinkel von einem Winkel abzuziehen hat, der nicht ganz zweien Rechten gleich ist, so wird uns obige Differenz den Winkel zu *groſs* angeben.

Die Gröſse dieses und desjenigen Fehlers zu bestimmen, welcher daraus entspringt, daſs die zu messende Kante zwar mit der Axenlinie des Instrumentes

parallel läuft, aber nicht mit ihr zusammenfällt, diefs soll ein Gegenstand der nächsten Paragraphe seyn.

§. 3. Es seyen $CP = x$ und $PQ = y$ die Coordinaten des Kreuzes Q, und eben so $CM = x'$ und $MN = y'$ die Coordinaten des Kreuzes N, alle in Beziehung auf das Centrum C. Die Entfernungen der Visirpuncte F und E vom Centrum, d. i. CF und CE (Fig. 20), seyen $= a$ und b. DF und $D'E'$ geben die richtige Stellung der spiegelnden Flächen an. Die Winkel, welche CF und CE' mit dem Horizonte HCR bilden, also HCF und HCE', seyen $= \gamma$ und γ'. Endlich seyen die Neigungswinkel der Flächen DF und $D'E'$ gegen den Horizont, nämlich $R'Fd$ und $R''E'D'$, $= \varphi$ und φ'.

Der Fehler μ, welchen man bei der Messung begeht, ist natürlich $= \varphi - \varphi'$.

Die Formeln für die Tangenten von φ und φ' erhält man auf folgende Weise:

Da $QFd = NFd$ ist, so mufs

$$NFR' - QFR' = 2R'Fd = 2\varphi,$$

daher

$$\text{tang.}\, 2\varphi = \text{tang.}\,(NFR' - QFR')$$
$$= \frac{\text{tang.}\, NFR' - \text{tang.}\, QFR'}{1 + \text{tang.}\, NFR' \,\text{tang.}\, QFR'}$$

seyn.

Es ist aber

$$\text{tang.}\, NFR' = \frac{y' + a \sin.\gamma}{x' + a\cos.\gamma} \quad \text{und}$$
$$\text{tang.}\, QFR' = \frac{y - a\sin.\gamma}{x + a\cos.\gamma},$$

folglich

$$\text{tang.}\, 2\varphi =$$
$$= \frac{(y' + a\sin.\gamma)(x + a\cos.\gamma) - (y - a\sin.\gamma)(x' + a\cos.\gamma)}{(x' + a\cos.\gamma)(x + a\cos.\gamma) + (y' + a\sin.\gamma)(y - a\sin.\gamma)}.$$

Löset man die Parenthesen auf, und streicht man die mit a^2 behafteten Glieder als nicht beachtungswerthe

kleine Gröſsen weg, welches letztere man recht gut kann, da schon a eine sehr kleine Gröſse ist, so erhält man

$$\text{tang.}\,2\varphi = \frac{xy' - x'y + a(x + x')\sin.\gamma - a(y - y')\cos.\gamma}{xx' + yy' + a(x + x')\cos.\gamma + a(y - y')\sin.\gamma}$$

Setzt man in dieser Gleichung statt a, b, und statt γ, γ', so erhält man

$$\text{tang.}\,2\varphi' = \frac{xy' - x'y + b(x + x')\sin.\gamma' - b(y - y')\cos.\gamma'}{xx' + yy' + b(x + x')\cos.\gamma' + b(y - y')\sin.\gamma'}.$$

Der Fehler ist also

$$\mu = \tfrac{1}{2}\,\text{arc.}\left(\text{tg.} = \frac{xy' - x'y + a(x + x')\sin.\gamma - a(y - y')\cos.\gamma}{xx' + yy' + a(x + x')\cos.\gamma + a(y - y')\sin.\gamma}\right)$$
$$- \tfrac{1}{2}\,\text{arc.}\left(\text{tg.} = \frac{xy' - x'y + b(x + x')\sin.\gamma' - a(y - y')\cos.\gamma'}{xx' + yy' + b(x + x')\cos.\gamma' + a(y - y')\sin.\gamma'}\right).$$

Diese Gleichung ist, so wie sie hier steht, noch nicht brauchbar, denn die darin vorkommenden Winkel γ und γ' sind veränderliche, also unbekannte Gröſsen. Suchen wir aber diejenigen Werthe von γ und γ' auf, für welche dieser Fehler am gröſsten wird, so leistet sie zu unserem Zwecke vollkommen Genüge.

§. 4. Setzen wir zuvörderst ein Mal $x' = x$ und $y' = y$, so erhalten wir

$$\mu = \tfrac{1}{2}\,\text{arc.}\left(\text{tang.} = \frac{2ax\sin.\gamma}{x^2 + y^2 + 2ax\cos.\gamma}\right)$$
$$- \tfrac{1}{2}\,\text{arc.}\left(\text{tang.} = \frac{2bx\sin.\gamma'}{x^2 + y^2 + 2bx\cos.\gamma'}\right).$$

Da diese Tangenten sehr kleine Gröſsen sind, so kann man sie ihren Bögen gleich setzen. Man erhält alsdann

$$\mu = \frac{ax\sin.\gamma}{x^2 + y^2 + 2ax\cos.\gamma} - \frac{bx\sin.\gamma'}{x^2 + y^2 + 2bx\cos.\gamma'}.$$

Diese Gröſse wird offenbar um so gröſser, je gröſser $\sin.\gamma$ und $(-\sin.\gamma')$ sind.

Da es uns nur um die Kenntniſs des möglich gröſs-

ten Werthes von μ zu thun ist, so können wir $\sin. \gamma = 1$ und $\sin. \gamma' = -1$, also

$$\mu = \frac{a x}{x^2 + y^2} + \frac{b x}{x^2 + y^2}$$

setzen.

Es ist kein Grund vorhanden, b kleiner oder grösser als a anzunehmen; setzen wir daher $b = a$, so erhalten wir

$$\mu = \frac{2 a x}{x^2 + y^2}.$$

Bezeichnet man $\frac{y}{x}$ mit m, so ist $y = m x$, daher

$$\mu = \frac{2 a x}{x^2 + m^2 x^2} + \frac{2 a}{x (1 + m^2)}.$$

Soll der Fehler μ eine bestimmte Gröſse nicht überschreiten, so kann man x bestimmen, für welches dieser Forderung Genüge geleistet wird. Es muſs nämlich seyn:

$$x > \frac{2 a}{\mu (1 + m^2)}.$$

Beispiel 1. Es sey $a = 3$ Linien; $x = 10$ Fuſs und $y = 5$ Fuſs. Alsdann ist

$$\mu = \frac{2 \cdot 3 \cdot 10}{144 (10^2 + 5^2)} = \frac{5}{12 \cdot 125} = \frac{1}{12 \cdot 25}$$
$$= \tfrac{1}{300} = 0{,}0033 \ldots = 0^\circ,\ 11'\ 27'',5.$$

Wäre $a = 2$ Linien, so würde

$$\mu = \tfrac{2}{3} \cdot 0^\circ,\ 11',\ 27'',5 = 0^\circ,\ 7',\ 38'',3$$

seyn, und für $a = 1$ Linie ist

$$\mu = \frac{0^\circ,\ 11',\ 27'',5}{3} = 0^\circ,\ 3',\ 49'',16.$$

Überhaupt wird der Fehler um so kleiner, je kleiner a ist, d. h. je näher die zu messende Kante dem Centrum rückt.

Beispiel 2. Es sey $x = 30$ und $y = 10$ Fuſs, so ist für $a = 3$ Linien:

$$\mu = \frac{2 \cdot 3 \cdot 30}{12 \cdot 12 (30^2 + 10^2)} = 0{,}00125 = 0^\circ,\ 4',\ 17'',8,$$

für $a = 2$ Linien:

$$\mu = \tfrac{2}{3} \cdot 0^\circ,\ 4',\ 17'',8 = 0^\circ,\ 2',\ 51'',9,$$

und für $a = 1$ Linie:

$$\mu = \frac{0^\circ,\ 4',\ 17'',8}{3} = 0^\circ,\ 1',\ 25'',9.$$

Überhaupt wird der Fehler um so kleiner ausfallen, je gröſser die Distanz $\sqrt{x^2 + y^2}$ ist.

Beispiel 3. Setzt man im vorigen Beispiele $y = x = 30$ Fuſs, so erhält man für $a = 3$ Linien:

$$\mu = \frac{5}{4 \cdot 1500} = 0{,}0006944 \ldots = 0^\circ,\ 2',\ 23'',24,$$

für $a = 2$ Linien:

$$\mu = \tfrac{2}{3} \cdot 0^\circ,\ 2',\ 23'',24 = 0^\circ,\ 1',\ 25'',5,$$

und für $a = 1$ Linie ist

$$\mu = \frac{0^\circ,\ 2',\ 23'',24}{3} = 0^\circ,\ 0',\ 47'',74.$$

Es nimmt insbesondere der Fehler μ mit dem Grösserwerden von y bedeutend ab. Da mit y der Einfallswinkel wächst, und mit diesem wieder die Deutlichkeit der Bilder zunimmt, so sind doppelte Gründe vorhanden, y so groſs wie möglich zu machen.

Beispiel 4. Es sey $m = \frac{y}{x} = 1$, und der Fehler soll noch keine Minute oder noch keine Secunde betragen, wie groſs muſs dann x wenigstens seyn?

Für den ersten Fall ist

$$x = \frac{2a}{2 \cdot 0{,}0002909} = \frac{a}{0{,}0002909} = 3438\,a,$$

für den zweiten Fall aber

$$x = \frac{a}{0{,}00000485} = 206300\,a.$$

Es sey $a = 1$ Linie $= \frac{1}{144}$ Fuſs, so ist in dem ersten Falle

$$x = \frac{3438}{144} = 24 \text{ Fuſs},$$

und in dem anderen Falle

$$x = 60 \cdot 24 = 144 \text{ Fuſs}.$$

Für $a = 2$ und 3 Linien verdoppeln und verdreifachen sich diese Distanzen.

§. 5. Nehmen wir jetzt unsere Hauptgleichung

$$\mu = \tfrac{1}{2} \text{arc.} \left(\text{tg.} = \frac{xy' - x'y + a(x+x') \sin.\gamma - a(y-y') \cos\gamma}{xx' + yy' + a(x+x') \cos.\gamma + a(y-y') \sin.\gamma} \right)$$
$$- \tfrac{1}{2} \text{arc.} \left(\text{tg.} = \frac{xy' - x'y + b(x+x') \sin.\gamma' - b(y-y') \cos.\gamma'}{xx' + yy' + b(x+x') \cos.\gamma' + a(y-y') \sin.\gamma'} \right)$$

noch ein Mal vor, und bestimmen wir γ und γ' so, daſs μ ein Maximum wird.

Damit aber μ ein Maximum werde, muſs der erste Bogen ein Maximum, und der zweite ein Minimum seyn. Je gröſser die Tangente ist, desto gröſser wird auch der ihr zugehörige Bogen seyn; und ist die Tangente ein Maximum oder Minimum, so ist es auch ihr Bogen.

Man hat also

$$\frac{xy' - x'y + a(x+x') \sin.\gamma - a(y-y') \cos.\gamma}{xx' + yy' + a(x+x') \cos.\gamma + a(y-y') \sin.\gamma}$$

zu differenziren, das erste Differenzialverhältniſs der Nulle gleich zu setzen, und mit Hülfe des zweiten Differenzialverhältnisses zu bestimmen, ob diese Tangente ein Maximum oder Minimum geworden sey.

Die Bedingungsgleichung ist also

$$[xx' + yy' + a(x+x') \cos.\gamma + a(y-y') \sin.\gamma] \times$$
$$\times [(x+x') \cos.\gamma + (y-y') \sin.\gamma]$$
$$= [xy' - x'y + a(x+x') \sin.\gamma - a(y-y') \cos.\gamma] \times$$
$$\times [(y-y') \cos.\gamma - (x+x') \sin.\gamma]$$

oder

$$[yy'(y-y') + x^2 y' - x'^2 y] \sin.\gamma$$
$$+ [xx'(x+x') + x'y^2 + xy'^2] \cos.\gamma$$
$$+ a[(x+x')^2 + (y-y')^2] = 0.$$

Setzt man nun

$$y y' (y - y') + x^2 y' - x'^2 y = A,$$
$$x x' (x + x') + x' y^2 + x y'^2 = B,$$
$$a[(x + x')^2 + (y - y')^2] = C,$$

so ist die Bedingungsgleichung

$$A \sin.\gamma + B \cos.\gamma + C = 0.$$

Wenn man statt $\sin.\gamma = \sqrt{1 - \cos.\gamma^2}$ setzt, und die Gleichung quadrirt, so erhält man

$$B^2 \cos.\gamma^2 + 2BC \cos.\gamma + C^2 = A^2 - A^2 \cos.\gamma^2,$$

d. i. $(A^2 + B^2) \cos.\gamma^2 + 2BC \cos.\gamma = A^2 - C^2,$

$$\cos.\gamma^2 + \frac{2BC}{A^2 + B^2} \cos.\gamma = \frac{A^2 - C^2}{A^2 + B^2}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\cos.\gamma = \frac{-BC \pm A\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 + B^2}.$$

Da C^2 in Beziehung zu $A^2 + B^2$ sehr klein ist, so kann man es aufser Acht lassen, und

$$\cos.\gamma = \frac{-BC \pm A\sqrt{A^2 + B^2}}{A^2 + B^2}$$

setzen.

Um nun zu wissen, ob für diesen Werth von γ, μ wirklich ein Maximum ist, kommt es darauf an

$$A \sin.\gamma + B \cos.\gamma + C$$

zu differenziren, und zu sehen, ob das Resultat *negativ* ausfällt. Es ist

$$\frac{d(A \sin.\gamma + B \cos.\gamma + C)}{d\gamma} = A \cos.\gamma - B \sin.\gamma.$$

Soll dieser Werth negativ seyn, so mufs $\sin.\gamma$ einen positiven Werth haben. Dann folgt aber aus der Bedingungsgleichung

$$A \sin.\gamma + B \cos.\gamma + C,$$

dafs $\cos.\gamma$ *negativ*, und zwar

$$\cos.\gamma = -\left(\frac{BC + A\sqrt{A^2+B^2}}{A^2+B^2}\right)$$

seyn mufs. Für diesen Werth von γ ist also die erste Tangente ein Maximum.

Diese Gleichung für cos. γ gilt auch für cos. γ', wenn man nur statt a, b setzt. Hier soll aber die Tangente ein Minimum werden, es mufs also A cos. γ' — B sin. γ' positiv seyn. Dann mufs aber sin. γ' einen negativen Werth haben. Hingegen cos. γ' kann auch positiv seyn. Hieraus folgt dann

$$\cos.\gamma' = \frac{-BC + A\sqrt{A^2+B^2}}{A^2+B^2}.$$

Was a und b anbelangt, so wird μ um so gröfser, je gröfser a und b sind; denn mit a nimmt die erste Tangente zu, und mit b die zweite Tangente ab. In der Ausübung kann man $a = b$, und zwar eine halbe bis drei Linien grofs annehmen. Im letztern Falle mufs man schon sehr unbehutsam messen.

Setzen wir in die Gleichung für μ, a der Nulle gleich, so fällt auch μ Null aus, welches ganz natürlich ist. Setzen wir ein anderes Mal $x' = x$ und $y' = y$, so erhalten wir

$$\mu = \tfrac{1}{2}\,\text{arc.}\left(\text{tang.} = \frac{2ax\sin.\gamma}{x^2+y^2+2ax\cos.\gamma}\right)$$
$$-\tfrac{1}{2}\,\text{arc.}\left(\text{tang.} = \frac{2bx\sin.\gamma'}{x^2+y^2+2bx\cos.\gamma'}\right);$$

ferner

$$A = 0,\quad B = 2x(x^2+y^2) \quad \text{und} \quad C = 4ax^2,$$

daher

$$\cos.\gamma = \cos.\gamma' = -\frac{BC}{B^2} = -\frac{C}{B} = -\frac{4ax^2}{2x(x^2+y^2)}$$
$$= -\frac{2ax}{x^2+y^2}$$

und

$$\sin.\gamma = \frac{\sqrt{(x^2+y^2)^2 - 4a^2x^2}}{x^2+y^2},$$

$$\sin.\gamma' = -\frac{\sqrt{(x^2+y^2)^2 - 4a^2x^2}}{x^2+y^2}.$$

Diese Werthe von γ und γ' in die vorhergehende Gleichung für μ gesetzt, geben das wahre Maximum von μ; da wir es uns jedoch zum Gesetz gemacht haben, die mit a^2 behafteten Glieder aufser Acht zu lassen, so müssen wir es auch hier thun. Wir erhalten alsdann wie oben:

$\sin.\gamma = 1$, $\sin.\gamma' = -1$ und $\cos.\gamma = \cos.\gamma' = 0$.

Beispiel 5. Es sey $a = b = 1$ Linie, $x = 10$, $y = 5$, $x' = 2$ und $y' = 1$ Fufs. Alsdann ist

$$A = 5(5-1) + 100 - 4.5 = 100,$$

$$B = 10.2(10+2) + 2.5^2 + 10 = 300,$$

$$C = \frac{12^2 + 4^2}{144} = \frac{10}{9}.$$

Hieraus folgt

$$1,\ \cos.\gamma = -\left(\frac{\frac{300.10}{9} + 100\sqrt{100^2 + 300^2}}{100^2 + 300^2}\right)$$

$$= -0{,}3195611.$$

$$2,\ \sin.\gamma = \sqrt{1 - 0{,}3195611^2} = \sqrt{1 - 0{,}102095}$$
$$= 0{,}94758.$$

$$3,\ \cos.\gamma' = \frac{-\frac{1}{3} + 31{,}6227766}{100} = 0{,}3128944.$$

$$4,\ \sin.\gamma' = -\sqrt{1 - 0{,}312894^2} = -0{,}94988.$$

Setzt man diese Werthe von

$\cos.\gamma$, $\sin.\gamma$, $\cos.\gamma'$ und $\sin.\gamma'$

in die Gleichung für μ ein, so erhält man

$$\mu = \tfrac{1}{2} \text{arc.} \left(\text{tg.} = \frac{10 - 10 + \frac{12}{144} . 0{,}94758 + \frac{4}{144} . 0{,}31956}{20 + 5 + \frac{12}{144} . 0{,}31956 + \frac{4}{144} . 0{,}94758} \right)$$

$$- \tfrac{1}{2} \text{arc.} \left(\text{tg.} = \frac{10 - 10 - \frac{12}{144} . 0{,}94988 - \frac{4}{144} . 0{,}31289}{20 + 5 + \frac{12}{144} . 0{,}31289 - \frac{4}{144} . 0{,}94988} \right)$$

$$= 0^0,\ 12',\ 3''.$$

So grofs ist also der gröfste Fehler, welcher hier begangen werden kann. Er fällt allerdings sehr bedeutend aus.

Beispiel 6. Die Gröfsen a, x und y seyen wie vorhin, aber $x' = 5$ Fufs und $y' = 3$ Fufs. Hier ist

$$A = 15\,(5 - 3) + 100 \,.\, 3 - 25 \,.\, 5 = 205,$$

$$B = 10 \,.\, 5\,(10 + 5) + 5 \,.\, 25 + 10 \,.\, 9 = 965,$$

$$C = \frac{15^2 + 2^2}{144} = \frac{229}{144}.$$

Mit Hülfe dieser Werthe ergibt sich nun

$$1,\ \cos. \gamma = - \left(\frac{\frac{965 \,.\, 229}{144} + 205 \sqrt{205^2 + 965^2}}{205^2 + 965^2} \right)$$

$$= - 0{,}20889.$$

$$2,\ \sin. \gamma = \sqrt{1 - 0{,}20889^2} = 0{,}97794.$$

$$3,\ \cos. \gamma' = \frac{1534{,}6 + 202239{,}5}{973250} = 0{,}20622.$$

$$4,\ \sin. \gamma' = - \sqrt{1 - 0{,}20622^2} = - 0{,}978505.$$

Hieraus findet man endlich

$$\mu = \tfrac{1}{2} \text{arc.} \left(\text{tg.} = \frac{30 - 25 + \frac{15}{144} . 0{,}97794 + \frac{2}{144} . 0{,}20889}{50 + 15 - \frac{15}{144} . 0{,}20889 + \frac{2}{144} . 0{,}97794} \right)$$

$$- \tfrac{1}{2} \text{arc.} \left(\text{tg.} = \frac{30 - 25 - \frac{15}{144} . 0{,}978505 - \frac{2}{144} . 0{,}20622}{50 + 15 + \frac{15}{144} . 0{,}20622 - \frac{2}{144} . 0{,}975505} \right)$$

$$= 2^0,\ 14',\ 44'' - 2^0,\ 9',\ 12'' = 0^0,\ 5',\ 32''.$$

Dieser Fehler ist zwar ebenfalls noch bedeutend, aber doch schon viel kleiner als der vorhergehende. Macht man endlich x' ebenfalls 10 und $y = 5$ Fufs, so

wird, nach dem ersten Beispiele, der Fehler nur 0°, 3′, 49″ betragen.

§. 6. Setzt man in $\mu = \frac{2ax}{x^2+y^2}$ (§. 4.) *x negativ*, so entsteht $\mu = -\frac{2ax}{x^2+y^2}$. Bringt man also über der rückwärts verlängerten Abscissenlinie, in denselben Entfernungen und Höhen, noch zwei andere Kreuze von derselben Beschaffenheit und Gröſse an, und miſst man dann, indem man sich auf die entgegengesetzte Seite des Instrumentes begibt, den Winkel auch mit Hülfe dieser Kreuze, so erhält man einen Fehler, der dem vorigen *gleich*, aber *entgegengesetzt* ist. Nimmt man nun aus den Resultaten der beiden Messungen das arithmetische Mittel, so muſs dieses dem *richtigen* Winkel gleich seyn. Dieſs ist ein bedeutender Vortheil, denn man hat dann nicht nöthig, die Kreuze sehr entfernt vom Instrumente anzubringen, kann daher auf ihre richtige Construction die gehörige Sorgfalt anwenden, und man bekommt, besonders durch die gröſsere Nähe der unteren Kreuze, sehr deutliche Bilder. Am besten ist es freilich, wenn das Zimmer zwei einander entgegengesetzte Fenster hat, an welchen man die Fadenkreuze anbringen kann. Das Instrument muſs dann in der Mitte zwischen beiden aufgestellt werden. Die Stelle des zweiten Fadenkreuzes kann jedoch, wenn man ein solches Zimmer nicht hat, auch ein Spiegel vertreten, den man an der entgegengesetzten Seite, ganz in der Nähe des Krystalls, und parallel mit der Ebene des Fadenkreuzes aufstellt. Das Bild im Spiegel vom gegenüberliegenden Fadenkreuze erscheint dann an der Stelle des andern Kreuzes.

Auch für den Fehler μ des Paragraphs 5. gilt dieser Satz. Setzt man nämlich x und x' *negativ*, so behalten zwar A und C ihre Werthe, aber B nimmt den

entgegengesetzten Werth an. Es wird dann

$$\cos.\gamma = \frac{BC \pm A\sqrt{A^2+B^2}}{A^2+B^2}.$$

Der Fehler

$$\mu = -\tfrac{1}{2}\,\text{arc.}\left(\text{tg.} = \frac{xy'-x'y+a(x+x')\sin.\gamma+a(y-y')\cos.\gamma}{xx'+yy'+a(x+x')\cos.\gamma+a(y-y')\sin.\gamma}\right)$$
$$+\tfrac{1}{2}\,\text{arc.}\left(\text{tg.} = \frac{xy'-x'y+a(x+x')\sin\gamma'+a(y-y')\cos.\gamma'}{xx'+yy'-a(x+x')\cos.\gamma'+a(y-y')\sin.\gamma'}\right)$$

wird auf der *negativen* Seite auch hier am gröfsten, wenn die erste Tangente ihr Maximum, und die andere ihr Minimum erreicht hat. Es folgt hieraus, dafs

$$\cos.\gamma = \frac{BC + A\sqrt{A^2+B^2}}{A^2+B^2} \quad \text{und}$$

$$\cos.\gamma' = \frac{BC - A\sqrt{A^2+B^2}}{A^2+B^2}$$

zu setzen ist. Die Werthe von $\cos.\gamma$ und $\cos.\gamma'$ sind daher die *entgegengesetzten* von denen des vorhergehenden Paragraphs. Setzen wir nun diese statt jene in die Gleichung für μ, so erhalten wir einen Werth für μ, welcher dem des vorhergehenden Paragraphs *gleich* und *entgegengesetzt* ist.

Also auch hier ist beim *Rückwärtsmessen* der entstehende Fehler dem verhergehenden gleich und entgegengesetzt, und das arithmetische Mittel aus beiden Messungen gibt auch hier den wahren Werth des Winkels. Es entspringt hieraus der grofse Vortheil, dafs man nicht nöthig hat, die unteren Kreuze eben so weit vom Centrum zu entfernen, als die Fadenkreuze, denn der Fehler, welcher dadurch entsteht, verschwindet doch durch das Rückwärtsmessen.

§. 7. Ein anderer Fehler entspringt aus der schiefen Stellung der zu messenden Kante gegen die Ebene des Instrumentes. Die Ursache davon ist die Dicke der Kreuze, und es ist daher ein wichtiger Umstand, diese

so gering wie möglich zu machen. In der Figur 21 sey *abcd* das Kreuz *N*, und *a' b' c' d'* das Bild des Fadenkreuzes *Q*. Man kann behaupten, daſs die hier gezeichnete Stellung, wo die Kreuze an ihren Enden zusammenstoſsen, also da einander nicht ein Mal zum Theil decken, die ungünstigste seyn müsse. Es fragt sich nun, welchen Winkel diese beiden Kreuze mit einander bilden. Ist *e* die halbe Höhe der beiden Kreuze, *d* die Dicke eines Faden, und ε jener Winkel, so kann man $\sin.\varepsilon = \frac{d}{e}$ setzen.

In diesem Falle, wo die beiden Kreuze nicht vollkommen zusammenfallen, hat man daher nicht den Winkel gemessen, welchen (Fig. 22) die beiden spiegelnden Ebenen *AD* und *AF* mit einander bilden, sondern einen Winkel *EAC*, dessen Gröſse durch die ebenen Winkel *BAE* und $BAC = 90^\circ \pm \varepsilon$ bestimmt ist. Beschreibt man aus *A* ein sphärisches Dreieck $\alpha\beta\gamma$, so ist in ihm

$$\cos.\alpha = \frac{\cos.\beta\gamma - \cos.\alpha\beta\cos.\alpha\gamma}{\sin.\alpha\beta\sin.\alpha\gamma}.$$

Setzt man $\beta\gamma = \alpha - \mu'$, wo μ' der Fehler ist, ferner $\alpha\beta = b$ und $\alpha\gamma = c$, so ist

$$\cos.\alpha = \frac{\cos.(\alpha - \mu') - \cos.b\cos.c}{\sin.b\sin c}.$$

Da μ' sehr klein ist, so kann man $\cos.\mu' = 1$ und $\sin.\mu' = \mu'$ setzen, und man erhält dann

$$\cos.\alpha\sin.b\sin.c = \cos.\alpha + \mu'\sin.\alpha - \cos.b\cos.c,$$

d. i. $$\mu' = \frac{\cos.b\cos.c - \cos.\alpha(1 - \sin.b\sin.c)}{\sin.\alpha}.$$

Die Winkel *b* und *c* sind aber sehr nahe 90°, daher kann man ihre Sinusse der Einheit gleich setzen. Thut man dieſs, so erhält man die einfache Gleichung

$$\mu' = \frac{\cos.b\cos.c}{\sin.\alpha}.$$

Je kleiner α ist, desto gröſser wird μ', und für $\alpha = \mu'$, denn kleiner kann α nicht werden, ist μ' am gröſsten. Wir erhalten auf diese Weise

$$\mu' = \sqrt{\cos. b \cos. c}.$$

Die Winkel b und c sind aber $= 90^\circ \pm \varepsilon$, also ihre Cosinusse einander gleich, und so folgt denn

$$\mu' \text{ oder } \sin. \mu' = \cos. (90^\circ \pm \varepsilon), \text{ d. i.}$$
$$\mu' = \pm \varepsilon.$$

Beispiel 7. Es sey $d = \frac{1}{4}$ Linie und $e = 1$ Fuſs, so ist

$$\sin. \varepsilon = \tfrac{1}{576} \quad \text{und} \quad \mu' = 0^\circ, 5', 58''.$$

Man sieht hieraus, daſs auch dieser Fehler sehr bedeutend werden kann.

§. 8. Es ist nicht nur eine unerläſsliche Bedingung, die Kreuze so dünn wie möglich zu machen, sondern man muſs ihnen auch ein solches Verhältniſs der Dicken geben, daſs diese Dicken im Auge einerlei scheinbare Gröſse haben. Ist dieses nicht der Fall, so kann das Bild des Fadenkreuzes mit dem andern Kreuze an den Grenzen nicht zusammen fallen, und dann ist eine sichere Stellung unmöglich. Aber auch auſserdem ist es nicht möglich, ganz fehlerfrei zu messen.

Es sey $a b$ (Fig. 23) die Dicke des horizontalen Faden des Fadenkreuzes Q, C das Centrum des Instrumentes, und $a' b'$ die Dicke der horizontalen Linie des Kreuzes N; so muſs, wenn man ganz ohne Fehler messen will, das Bild von $a b$, $a' b'$ vollkommen decken, aber auch nicht überdecken, d. h. nicht über die Grenzen von $a' b'$ hinaus gehen. Dieſs hat man jedoch nicht ganz in seiner Gewalt; in den meisten Fällen wird sich das Bild von $a b$ mit $a' b'$ nur zum Theil decken, und im ungünstigsten Falle werden beide Kreuze nur an ihren Grenzen zusammenstoſsen. Es fragt sich daher: wie groſs ist der daraus entspringende Fehler?

Dieser Fehler ist dem Winkel $a'Cb$ gleich zu setzen, und da er sowohl, als auch $a'b'$ immer sehr klein ist, so kann man

$$\sin. a'Cb' = a'Cb' = \frac{a'b'}{CN} = \frac{a'b'}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

setzen.

Diesen Fehler kann man aber bei Einer Messung zwei Mal begehen; setzt man ihn daher $=\frac{\mu''}{2}$, und die Breite $a'b' = d$, so ist

$$\mu'' = \frac{2d}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Beispiel 8. Es sey $d = \frac{1}{2}$ Linie, so ist der Fehler für das Beispiel 5:

$$\mu'' = \frac{1}{144\sqrt{4+1}} = 0^\circ,\ 10',\ 40'',6.$$

Für das Beispiel 6. ist dieser Fehler

$$\mu'' = \frac{1}{144\sqrt{34}} = 0^\circ,\ 4',\ 6''.$$

§. 9. Ein weiterer Fehler entspringt aus der Excentricität des Instruments.

In der Figur 24 sey C das wahre, und C' das falsche Centrum des Instruments. Die Lage des letztern werde durch die beiden Coordinaten $CA = a$ und $AC' = b$ angegeben. Der Radius des eingetheilten Kreises, nämlich $CO = CO'$, sey $= r$. Bei O befinde sich der Vernier, $OC'O'$ sey der richtige Winkel α, folglich $OCO' = \beta$ der falsche, von dem Vernier angegebene Winkel.

Es ist

$$\text{tang.} O = \frac{C'A}{OA} = \frac{b}{r+a},$$

daher

$$\begin{aligned}\text{tang. } O'C'D &= \text{tang. } (O'CO - DC'O)\\ &= \text{tang. } (\alpha - O)\\ &= \frac{\text{tang. } \alpha - \text{tang. } O}{1 + \text{tang. } \alpha \text{ tang. } O}\\ &= \frac{\text{tang. } \alpha - \frac{b}{r+a}}{1 + \text{tang. } \alpha \frac{b}{r+a}}\\ &= \frac{(r+a) \text{ tang. } \alpha - b}{r + a + b \text{ tang. } \alpha}.\end{aligned}$$

Aber tang. $O'C'D$ ist auch

$$= \frac{O'D}{C'D} = \frac{O'B - DB}{CB + CA} = \frac{r \sin. \beta - b}{r \cos. \beta + a},$$

also ist

$$\frac{r \sin. \beta - b}{r \cos. \beta + a} = \frac{(r+a) \text{ tang. } \alpha - b}{r + a + b \text{ tang. } \alpha} \quad \text{oder}$$

$$[(r \cos. \beta + a)(r + a) - b (r \sin. \beta - b)] \text{ tang. } \alpha =$$
$$= (r + a)(r \sin. \beta - b) + b (r \cos. \beta + a).$$

Daraus folgt

$$\text{tang. } \alpha = \frac{(r+a)(r \sin. \beta - b) + b (r \cos. \beta + a)}{(r+a)(r \cos. \beta + a) - b (r \sin. \beta - b)}.$$

Löst man die Parenthesen auf, und läſst man die mit den Producten und Quadraten von a und b behafteten Glieder weg, welches man wegen ihrer Kleinheit recht gut kann, so erhält man

$$\text{tang. } \alpha = \frac{(r+a) \sin. \beta - b (1 - \cos. \beta)}{(r+a) \cos. \beta + a - b \sin. \beta}.$$

Miſst man nun zwei bekannte Winkel sehr scharf, z. B. den stumpfen und spitzen Winkel einer Theilungsgestalt von der dodekaëdrischen Granatblende, nämlich die Winkel von 60° und 120°, so kann man mit Hülfe dieser Gleichung, aus diesen und den von dem Instrumente angegebenen Winkeln, die Coordinaten des falschen Centrums, also auch die Gröſse der Excentricität bestimmen.

Der Fehler ist

$$\mu''' = \alpha - \beta = \text{arc.}\left(\text{tg.} = \frac{(r+a)\sin.\beta - b(1-\cos.\beta)}{(r+a)\cos.\beta + a - b\sin.\beta}\right) - \beta.$$

Daraus folgt

$$\text{tang.}\,\mu''' = \frac{\dfrac{(r+a)\sin.\beta - b(1-\cos.\beta)}{(r+a)\cos.\beta + a - b\sin.\beta} - \text{tang.}\,\beta}{1 + \dfrac{(r+a)\sin.\beta - b(1-\cos.\beta)}{(r+a)\cos.\beta + a - b\sin.\beta}\,.\,\text{tang.}\,\beta}$$

$$= \frac{(r+a)\sin.\beta - b(1-\cos.\beta) - (r+a)\sin.\beta - (a - b\sin.\beta)\,\text{tg.}\beta}{(r+a)\cos.\beta + a - b\sin.\beta + [(r+a)\sin.\beta - b(1-\cos\beta)]\,\text{tg.}\beta}$$

$$= \frac{b(1-\cos.\beta) - a\sin.\beta}{r + a(1+\cos.\beta) - b\sin.\beta},$$

dafür kann man in der Ausübung

$$= \frac{b(1-\cos.\beta) - a\sin.\beta}{r}$$

setzen.

Kennt man nun die Coordinaten a und b, so läſst sich mit Hülfe dieser und dem gemessenen Winkel β der Fehler μ''' sogleich berechnen.

Untersuchen wir jetzt, für welchen Werth von β er ein Maximum wird. Die Bedingungsgleichung ist diese:

$$b\sin.\beta = a\cos.\beta, \quad \text{also}$$

$$\text{tang.}\,\beta = \frac{a}{b}.$$

Um zu wissen, ob für $\text{tang.}\,\beta = \frac{a}{b}$, μ ein Maximum oder Minimum geworden sey, ist $b\sin.\beta - a\cos.\beta$ zu differenziren, und zu sehen, ob dieses zweite Differenzialverhältniſs negativ oder positiv ausfällt. Es ist

$$= b\cos.\beta + a\sin.\beta,$$

$$= b(\cos.\beta + \text{tang.}\,\beta\sin.\beta),$$

$$= \frac{b(\cos.\beta^2 + \sin.\beta^2)}{\cos.\beta} = \frac{b}{\cos.\beta},$$

also *negativ* für einen negativen Werth von $\cos.\beta$. Die Bedingungsgleichung ist aber $b\sin.\beta = a\cos.\beta$, folg-

lich muſs auch sin. β einen negativen Werth annehmen. Soll also der Fehler μ''' am gröſsten ausfallen, so müssen

$$\cos.\beta = -\frac{1}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^2\right)}} = \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{und}$$

$$\sin.\beta = \frac{-\frac{a}{b}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^2\right)}} = \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

in die Formel für μ''' eingesetzt werden. Es entsteht hieraus folgende Gleichung:

$$\text{tang.}\,\mu''' = \frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{r}.$$

Für $b = 0$ ist $\text{tang.}\,\mu''' = \frac{a}{r}$, und

» $a = 0$ » $\text{tang.}\,\mu''' = \frac{2b}{r}$.

Beispiel 9. Man habe den Winkel von 60° nur 59°, 55′, dagegen den Winkel von 120° = 120°, 5′ gefunden. Es sollen, wenn der Radius des Instrumentes zur Einheit angenommen wird, die Coordinaten a und b gefunden, und dann bestimmt werden, wie groſs der gröſste Fehler bei diesem Instrumente ausfällt.

Wir haben zuvörderst folgende beide Gleichungen zu vereinigen:

$$\text{tang. } 60^\circ = \frac{(1+a)\sin. 59^\circ, 55' - b\,(1-\cos. 59^\circ, 55')}{(1+a)\cos. 59^\circ, 55' + a - b\sin. 59^\circ, 55'},$$

$$\text{tang. } 120^\circ = \frac{(1+a)\sin. 120^\circ, 5' - b\,(1-\cos. 120^\circ, 5')}{(1+a)\cos. 120^\circ, 5' + a - b\sin. 120^\circ, 5'}.$$

Entwickelt man aus beiden Gleichungen b, und setzt die Werthe für b einander gleich, so erhält man eine Gleichung, worin nur a vorkommt; diese hat man nun auf a aufzulösen.

Es ist

$$b = \frac{(1+a)(\cos. 59^0, 55' \tan g. 60^0 - \sin. 59^0, 55') + a \tan g. 60^0}{\sin. 59^0, 55' \tan g. 60^0 - (1 - \cos. 59^0, 55')}$$

und auch

$$= \frac{(1+a)(\cos. 120^0, 5' \tan g. 120^0 - \sin. 120^0, 5') + a \tan g. 120^0}{\sin. 120^0, 5' \tan g. 120^0 - (1 - \cos. 120^0, 5')}$$

$$= \frac{(1+a)(\cos. 59^0, 55' \tan g. 60^0 - \sin. 59^0, 55') - a \tan g. 60^0}{- \sin. 59^0, 55' \tan g. 60^0 - (1 + \cos. 59^0, 55')}.$$

Nun ist aber

$$\cos. 59^0, 55' \tan g. 60^0 - \sin. 59^0, 55' = 0{,}002909,$$
$$\sin. 59^0, 55' \tan g. 60^0 = 1{,}49874,$$
$$\tan g. 60^0 = 1{,}7320508,$$
$$\cos. 50^0, 55' = 0{,}5012591,$$

daher

$$\frac{0{,}002909 (1+a) + 1{,}7320508\, a}{1{,}49874 - 0{,}49874}$$

$$= \frac{0{,}002909 (1+a) - 1{,}7320508\, a}{- 1{,}49874 - 1{,}501159}, \text{ d. i.}$$

$$- 0{,}002909 = 1{,}740776\, a,$$

folglich

$$a = - \frac{0{,}002909}{1{,}740776} = - 0{,}001671 \text{ und}$$

$$b = 0{,}002909 - 1{,}734959 \cdot 0{,}001671$$
$$= 0{,}00001$$

unbeachtsam.

Hieraus folgt der gröfste Fehler

$$\mu''' = - 0{,}001681 = 0^0, 5', 47''.$$

§. 10. Setzen wir in der Gleichung

$$\tan g. \mu''' = \frac{b (1 - \cos. \beta) - a \sin. \beta}{r}$$

a und b *negativ*, so verwandelt sie sich in

$$\tan g. \mu''' = - \frac{b (1 - \cos. \beta) - a \sin. \beta}{r};$$

und setzen wir für $\sin. \beta$ und $\cos. \beta$ diejenigen Werthe ein, für welche $\frac{b (1 - \cos. \beta) - a \sin. \beta}{r}$ ein Maximum

wird (§. 9.), so erhalten wir

$$\text{tang.}\,\mu''' = -\frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{r},$$

gerade den entgegengesetzten Werth von dem vorhergehenden.

Dreht man daher das Instrument um 180° herum, so daſs O'' nach O, und O nach O'', ferner C nach C'', und A nach A' kommt, also die Coordinaten $C''A'$ und $A'C'$ eine entgegengesetzte Lage annehmen, und miſst man dann den vorigen Winkel noch ein Mal, so begeht man hierbei einen Fehler, der dem vorigen gleich, aber entgegengesetzt ist. Das arithmetische Mittel aus beiden Messungen wird dann den wahren Werth des gemessenen Winkels angeben.

Beispiel 10. Es sey $a = 0{,}002$, $b = 0$, $r = 1$, und der gemessene Winkel $\alpha = 45°$, wie groſs ist der durch das Instrument angegebene Winkel β?

Die Tangente von 45° ist $= 1$, daher ist die Gleichung, aus welcher sich β bestimmen läſst:

$$1 = \frac{1{,}002\ \sin.\beta}{1{,}002\ \cos.\beta + 0{,}002} \quad \text{oder}$$

$$\sin.\beta - \cos.\beta - \frac{0{,}002}{1{,}002} = 0.$$

Hieraus folgt

$$\cos.\beta = \frac{-\frac{0{,}002}{1{,}002} + \sqrt{2}}{2} = 0{,}7061088 \quad \text{und}$$

$$\beta = 45°,\ 4',\ 51''.$$

Für eine *Gegenmessung* ist

$$\sin.\beta - \cos.\beta + \frac{0{,}002}{0{,}998} = 0, \quad \text{also}$$

$$\cos.\beta = \frac{0{,}0020040 + 1{,}4142136}{2} = 0{,}7081088 \quad \text{und}$$

$$\beta = 44°,\ 55',\ 8''.$$

Das arithmetische Mittel aus beiden Messungen gibt

44^0, $59'$, $59'',5$, wofür recht gut 45^0 gesetzt werden kann. Dieſs ist auch der gemessene Winkel.

§. 11. Fehler, die aus der unrichtigen Eintheilung des Instrumentes hervorgehen, sind natürlich nicht zu berechnen, und also auch nicht zu umgehen. Dagegen sind sie durch die Multiplication der Beobachtungen bis zu jeder beliebigen Kleinheit zu vermindern. Bei dieser Operation darf man die eingetheilte Ebene nie rückwärts in der Richtung RZH (Fig. 18) drehen, denn diese Drehung geschieht bloſs mit der Axe des Instruments, sondern man dreht sie nur in der Richtung HZR, und zwar dann, wenn man die Fläche CF wieder in die erste Lage gebracht hat, und die Fläche CE in die spiegelnde Lage bringen will.

Miſst man auf diese Art einen und denselben Winkel n Mal hinter einander, hat das Instrument während diesem m Mal 180 Grad zurückgelegt, und zeigt es dann noch α Grade, so läſst sich daraus der gemessene Winkel x auf folgende Weise bestimmen.

Da der gemessene und der Umdrehungswinkel einander zu 180^0 ergänzen, so muſs das Instrument $n\,(180^0 - x)$ zurückgelegt haben. Es hat aber auch $= m\,180^0 + 180^0 - \alpha$ zurückgelegt, daher ist

$$n\,(180^0 - x) = m\,180^0 + 180^0 - \alpha,$$

folglich

$$x = \frac{(n - m - 1)\,180^0 + \alpha}{n}.$$

Wenn daher auch der Winkel α von der unrichtigen Eintheilung des Instrumentes etwas falsch angegeben wird, so ist doch der daraus entspringende Fehler von dem gemessenen Winkel x schon n Mal kleiner als der ursprüngliche, wenn man nämlich n Beobachtungen angestellt hat.

§. 12. Die in den vorhergehenden Paragraphen be-

trachteten Fehler sind von zweierlei Art: einige sind bei einer und derselben Messung constant, andere sind es nicht; diese lassen sich durch die Multiplication der Beobachtungen vermindern, jene nicht. Zu den Fehlern der ersten Art gehören alle diejenigen, welche daraus hervorgehen, daſs die zu messende Kante mit der Axenlinie des Instrumentes nicht zusammenfällt, also die in den Paragraphen 3, 4, 5, 6 und 7 betrachteten Fehler. Auf die Verminderung dieser Fehler ist daher eine besondere Sorgfalt zu verwenden. Man hat daher die Kreuze so groſs und dünn wie möglich zu machen, ihnen groſse Abscissen, und insbesondere groſse Ordinaten zu geben, und sie überhaupt sehr sorgfältig zu construiren. Es ist deſshalb das Rückwärtsmessen ganz besonders zu empfehlen. Daſs man endlich mit der gröſsten Sorgfalt beobachten und besonders die zu messende Kante der Axenlinie des Instrumentes so nahe wie möglich bringen muſs, versteht sich von selbst.

Fehler der andern Art sind diejenigen, welche in der Dicke der Horizontallinie des Fadenkreuzes ihren Grund haben (§. 8.), und die, welche aus der unrichtigen Eintheilung des Randes vom Instrumente und aus der Excentricität des Instrumentes hervorgehen. Daſs die ersteren Fehler veränderlich sind, folgt daraus, daſs es eben so wahrscheinlich ist, das Instrument, oder die Axe desselben, um die Dicke der horizontalen Linie des Fadenkreuzes zu viel, als zu wenig zu drehen. Der Fehler der Excentricität wird, so wie der Fehler der unrichtigen Eintheilung, durch die Multiplication der Beobachtungen vermindert, er kann aber auch durch eine *Gegenmessung* vernichtet werden.

Kommt es darauf an, einen Winkel sehr scharf zu messen, so verfahre man auf folgende Art:

Man messe den gegebenen Winkel zehn oder meh-

rere Male hinter einander, und berechne ihn dann mit Hülfe der gegebenen Formel aus der Anzahl der Messungen, aus der Anzahl, wie oft das Instrument 180 Grad zurückgelegt hat, und aus dem von dem Vernier zuletzt angegebenen Winkel α. Ist man nun nicht sicher, daſs das Instrument mit Excentricität behaftet ist, so drehe man es um 180 Grad herum, und wiederhole die vorige Operation. Aus den Resultaten beider Operationen nehme man das arithmetische Mittel. Jetzt begebe man sich auf die andere Seite des Instruments, und mache mit Hülfe der beiden andern, den vorigen gegenüber liegenden, Kreuzen die vorigen Operationen zum zweiten Male. Auch aus diesen nehme man das arithmetische Mittel. Nimmt man endlich aus diesen beiden arithmetischen Mitteln wieder das arithmetische Mittel, oder, was dasselbe ist, addirt man die vier erhaltenen Resultate, und dividirt sie durch 4, so erhält man den gemessenen Winkel mit der gröſsten Schärfe, weil man dadurch die begangenen Fehler theils vermindert und theils sogar vernichtet hat.

Das Goniometer von *Malus*.

§. 13. In der Figur 25 sey A die mit Hülfe einer Libelle vollkommen horizontal gestellte Ebene des Instruments, C dessen Centrum, und MOC die Richtung des Fernrohrs. Durch die beiden Coordinaten $CM = y$ und $MN = x$ werde der Punct N bestimmt, durch welchen die durch den Faden eines Bleilothes gebildete Verticallinie geht. Der zu messende Winkel sey FDE oder $E'D'F'$, und die Visirpuncte auf den Krystallflächen mögen das eine Mal F, das andere Mal E' seyn. Ihre Lage gegen das Centrum werde durch die Linien $CF = a$ und $CE' = b$ bestimmt.

Man klebt auch hier den Krystall, dessen Winkel

man messen will, entweder unmittelbar mit Wachs auf die hervorragende Axe *C* des Instruments, oder auf einen besonderen Apparat.

Die Vorrichtung mit der Nufs ist hier besonders zu empfehlen. Die verticale Stellung gibt man der zu messenden Kante *D* auf ähnliche Weise wie beim Reflexionsgoniometer. Man sieht durch das Fernröhr, und dreht den Krystall mittelst der Axe so lange, bis das Bild von der Linie *N* den verticalen Faden im Fernrohre durchschneidet. Jetzt drückt man das Wachs mit dem Krystalle so lange hin und her, oder stellt die Schrauben des Apparates so lange, bis das Bild des Fadens *N* mit dem Faden im Fernrohre vollkommen zusammenfällt. Man kann dann behaupten, dafs die spiegelnde Fläche *D F* auf der horizontalen Ebene *N F D*, folglich auch auf der Ebene des Instrumentes senkrecht stehe. Hierauf drehe man die Axe des Instrumentes mit dem darauf befestigten Krystall von der Linken zur Rechten, bis das Bild von *N* in der Fläche *D' E'* erscheint, und wiederhole die vorhergehende Operation. Hat man auf diese Art auch die Fläche *D' E'* vertical gestellt, und dann gefunden, dafs dadurch die Fläche *D F* ihre verticale Lage nicht verloren hat, so ist man gewifs, dafs die Kante *D* vertical steht.

Ein wichtiger Gegenstand ist hier, dafs der Faden im Fernrohre gehörig fein sey, und vollkommen in der verticalen Ebene *C O M* liege. Das letztere kann man mit Hülfe eines, die verlängerte *M O C* schneidenden, Bleilothes und mittelst einer Mikrometerschraube am Ringe des Fadens ohne grofse Mühe machen. Man kann hier der Alhidadenregel an jedem Ende Einen Vernier geben, und sie zugleich mit einer Mikrometerschraube versehen. Das erstere ist ein bedeutender Vorzug vor dem Goniometer von *Wollaston*, denn man kann mit

dieser Vorrichtung durch eine einzige Messung den Fehler der Excentricität vermeiden, indem man das Mittel aus beiden Beobachtungen an den Vernieren nimmt.

§. 14. Setzt man auch hier den gemessenen Winkel der Ergänzung des Umdrehungswinkels zu zwei Rechten gleich, so begeht man einen Fehler, so lange nicht $a = b$ ist, d. i. F mit E' zusammenfällt. Denn in dem Vierecke $CEDF$ messen alle vier Winkel zusammen vier Rechte, $C + D$ betragen aber, der Voraussetzung gemäſs, schon zwei Rechte, folglich müssen auch $CED + CFD$, d. i. $CE'D' + CFD$, zwei Rechte ausmachen. Daraus folgt der Parallelismus der Linien DFd und $D'E'd'$, und hieraus wieder, daſs die Winkel MFd, $ME'D'$, $ME'N$ und MFN einander gleich seyn müssen, welches nicht anders geht, als daſs F und E nur Einen Punct ausmachen.

Der Winkel, um welchen man DFd drehen muſs, damit diese Linie mit der andern Linie $d'E'D'$ parallel wird, ist offenbar dem begangenen Fehler gleich. Nennen wir ihn ebenfalls μ, so ist also

$$\mu = CE'd' - CFD.$$

Nun ist aber

$$CE'd' = OE'D' = NE'd',$$

daher

$$CE'd' = \frac{CE'N}{2},$$

und eben so

$$CFD = \frac{CFN}{2}.$$

Es ist ferner

$$CE'N = 180^\circ - NE'M$$

und

$$CFN = 180^\circ - NFM,$$

folglich

$$\mu = \frac{CE'N - CFN}{2}$$

$$= \frac{180^\circ - NE'M - 180^\circ + NFM}{2}$$

$$= \frac{NFM - NE'M}{2}.$$

Nun ist endlich

$$\text{tang. } NFM = \frac{x}{y-a} \quad \text{und}$$

$$\text{tang. } NE'M = \frac{x}{y-b},$$

daher

$$\mu = \tfrac{1}{2}\,\text{arc.}\left(\text{tang.} = \frac{x}{y-a}\right) - \tfrac{1}{2}\,\text{arc.}\left(\text{tang.} = \frac{x}{y-b}\right).$$

Der Fehler μ wird um so kleiner, je mehr sich die Gröſsen $\frac{x}{y-a}$ und $\frac{x}{y-b}$ einander nähern, und nimmt zu, je mehr sie sich von einander entfernen. Macht man daher a und $-b$ so groſs wie möglich, etwa einige Linien, so erhält man den gröſsten Fehler von μ, nämlich

$$\mu = \tfrac{1}{2}\,\text{arc.}\left(\text{tang.} = \frac{x}{y-a}\right) - \tfrac{1}{2}\,\text{arc.}\left(\text{tang.} = \frac{x}{y+a}\right),$$

d. i.

$$2\mu = \text{arc.}\left(\text{tang.} = \frac{x}{y-a}\right) - \text{arc.}\left(\text{tang.} = \frac{x}{y+a}\right)$$

oder

$$\text{tang. } 2\mu = \frac{\frac{x}{y-a} - \frac{x}{y+a}}{1 + \frac{x}{y-a} \cdot \frac{x}{y+a}} = \frac{2ax}{x^2+y^2}.$$

Der Winkel 2μ ist noch sehr klein, daher kann man ihn seiner Tangente gleich setzen. Wir erhalten dann

$$\mu = \frac{ax}{x^2+y^2}.$$

Dieser Werth von μ unterscheidet sich von dem im §. 4. für *Wollaston's* Reflexionsgoniometer gefundenen

nur durch den Factor 2; es folgt hieraus, daſs für dasselbe a und für einerlei Coordinaten der gröſste Fehler bei dem Goniometer von *Malus* nur halb so groſs als beim *Wollaston*'schen Goniometer ist. Dieſs ist ein beachtungswerther Vorzug von *Malus* Goniometer.

Beispiel 11. Es sey $x = y = 20$ Fuſs, $a = 1$ Linie, und b das eine Mal $= 0$, und das andere Mal $= -1$ Linie, wie groſs ist der daraus entspringende Fehler?

Für den ersten Fall ist, wenn man in

$$\text{tang. } 2\mu = \frac{(a-b)\,x}{(y-a)\,(y-b) + x^2}$$

$a = \frac{1}{144}$, $b = 0$, $x = y = 20$ setzt,

$$\mu = \frac{20}{288\left[(20 - \frac{1}{144})\,20 + 20^2\right]} = \frac{1}{11518} = 0^0,\ 0',\ 18''.$$

Für den zweiten Fall ist

$$\mu = \frac{20}{144\,(20^2 + 20^2)} = 0^0,\ 0',\ 36''.$$

§. 15. Setzt man in der aufgefundenen Gleichung $\mu = \frac{ax}{x^2 + y^2}$, x *negativ*, so wird $\mu = -\frac{ax}{x^2+y^2}$; es entsteht also ein dem vorigen gerade entgegengesetzter Fehler. Hängt man daher auch auf die andere Seite von MC, in derselben Entfernung wie N, ein Bleiloth, und miſst man auch mit Hülfe dessen den Winkel, so begeht man einen Fehler, der dem vorigen gleich und entgegengesetzt ist. Nimmt man nun aus beiden Messungen das arithmetische Mittel, so bekommt man zum Resultate den richtigen Winkel.

Es versteht sich übrigens von selbst, daſs dieses nur näherungsweise wahr ist.

Die übrigen Fehler, welche beim Winkelmessen mit dem Reflexionsgoniometer von *Malus* begangen werden können, sind wie die beim *Wollaston*'schen Goniometer zu beurtheilen.

III.

Theorie der mittleren Werthe;

von

Dr. *C. Fr. Hauber.*

(Fortsetzung.)

35.

Diese allgemeinen Betrachtungen wollen wir nun auf die wichtigsten Methoden der Bestimmung der Grössen ξ, v, z . . . aus den Gleichungen (1) anwenden.

I. Das von *Tobias Maier* gelehrte Verfahren, das ehemals gebräuchlich war, besteht darin, daſs man zuerst die Coefficienten von ξ in allen Gleichungen (1) positiv (oder in allen negativ) macht, und die Gleichungen addirt, dann eben so in Beziehung auf die Coefficienten von v, z . . . verfährt, wodurch man r Gleichungen erhält, aus denen, die Summe der in jeder von denselben theils mit ihrem Zeichen theils mit entgegengesetztem Zeichen genommenen Fehler $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n, \ldots = 0$ gesetzt, ξ, v, z . . . durch Elimination bestimmt werden.

Man sieht leicht, daſs diese Methode nicht in allen Fällen anwendbar ist, weil sie Abwechslung in den Zeichen der Coefficienten voraussetzt. Wenn z. B. in jeder von den Gleichungen (1) die Coefficienten von ξ mit den Coefficienten von v einerlei Zeichen haben, so kommt man dadurch, daſs man die Coefficienten von ξ in allen Gleichungen positiv macht, und dann die Gleichungen addirt, auf eben dieselbe Endgleichung, wie dadurch, daſs man die Coefficienten von v in allen Gleichungen positiv macht, und dann die Gleichungen addirt; man erhält also nicht so viele von einander verschiedene

Endgleichungen, als gesuchte Gröſsen sind. Eben so ist es auch, wenn die Coefficienten von ξ und von v in jeder von den Gleichungen (1) entgegengesetzte Zeichen haben.

Das Summenzeichen Σ beziehe sich auf diejenigen unter den Gleichungen (1), in denen die Coefficienten von ξ ursprünglich positiv sind, und das Summenzeichen S auf diejenigen, in denen die Coefficienten von ξ ursprünglich negativ sind, die also mit -1 multiplicirt werden müssen, um die Coefficienten von ξ überall positiv zu machen, und es sey

$$\Sigma\delta_\nu - S\delta_n = \mathfrak{D},\ \Sigma a_\nu - S a_n = \mathfrak{G},\ \Sigma b_\nu - S b_n = \mathfrak{H},$$
$$\Sigma c_\nu - S c_n = \mathfrak{K},\ \ldots$$

Indem man nun in allen Gleichungen (1) die Coefficienten von ξ positiv macht, und dann die Gleichungen addirt, erhält man

$$-\Sigma\varepsilon_\nu + S\varepsilon_n = -\mathfrak{D} + \mathfrak{G}\xi + \mathfrak{H}v + \mathfrak{K}z + \ldots$$

Was Σ, S, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$ ... in Beziehung auf die Coefficienten von ξ sind, das seyen Σ', S', $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{H}'$ $\mathfrak{K}'$ ... in Beziehung auf die Coefficienten von v, und Σ'', S'', $\mathfrak{D}''$, $\mathfrak{G}''$, $\mathfrak{H}''$, $\mathfrak{K}''$ ... in Beziehung auf die Coefficienten von z, u. s. w., und man setze

$$\begin{aligned}
\Xi &= -\Sigma\varepsilon_\nu + S\varepsilon_n,\\
Y &= -\Sigma'\varepsilon_{\nu'} + S'\varepsilon_{n'},\\
Z &= -\Sigma''\varepsilon_{\nu''} + S''\varepsilon_{n''},
\end{aligned}$$
u. s. w.;

so entsprechen den Gleichungen (13) hier folgende:

$$\left.\begin{aligned}
\Xi &= -\mathfrak{D} + \mathfrak{G}\xi + \mathfrak{H}v + \mathfrak{K}z + \ldots,\\
Y &= -\mathfrak{D}' + \mathfrak{G}'\xi + \mathfrak{H}'v + \mathfrak{K}'z + \ldots,\\
Z &= -\mathfrak{D}'' + \mathfrak{G}''\xi + \mathfrak{H}''v + \mathfrak{K}''z + \ldots,\\
&\text{u. s. w.}
\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

Aus diesen Gleichungen bestimmt man ξ, v, z ...

durch Elimination, indem man für Ξ, Y, Z . . . setzt o. Um die Genauigkeit der so erhaltenen Werthe von ξ, v, z . . . zu bestimmen, mufs man ΣA_n^2, ΣB_n^2, ΣC_n^2 . . . suchen.

Der in Nro. 34 durch P bezeichnete Factor ist hier $= + 1$ für diejenigen unter den Gleichungen (1), die zu der Summe Σ gehören, und $= - 1$ für diejenigen, die zu der Summe S gehören. Eben so ist der Factor $Q = + 1$ für die zu der Summe Σ', und $= - 1$ für die zu der Summe S' gehörigen Gleichungen; der Factor $R = + 1$ für die zu der Summe Σ'', und $= - 1$ für die zu der Summe S'' gehörigen Gleichungen, u. s. w.

Unter jenen s Gleichungen seyen ρ solche, in deren jeder die Coefficienten aller gesuchten Gröfsen ξ, v, z . . . einerlei Zeichen haben; so gehört jede von diesen ρ Gleichungen entweder sowohl zu der Summe Σ, als auch zu Σ', zu Σ'' u. s. w., oder sowohl zu der Summe S, als auch zu S', zu S'' u. s. w., daher ist für jede von denselben entweder ein jeder von den Factoren P, Q, R . . . $= + 1$, oder ein jeder $= - 1$, also

$$A = \pm (N_{1,1} + N_{1,2} + N_{1,3} + \ldots),$$

folglich

$$A^2 = (N_{1,1} + N_{1,2} + N_{1,3} + \ldots)^2,$$

und eben so

$$B^2 = (N_{2,1} + N_{2,2} + N_{2,3} + \ldots)^2,$$
$$C^2 = (N_{3,1} + N_{3,2} + N_{3,3} + \ldots)^2,$$

u. s. w.

Ferner seyen unter jenen s Gleichungen σ solche, in deren jeder der Coefficient von ξ ein anderes Zeichen habe, als die Coefficienten von v, z . . .; so gehört jede von diesen σ Gleichungen entweder zu Σ, und zugleich zu S', zu S'' u. s. w., oder zu S, und zugleich zu Σ', zu Σ'' u. s. w., daher ist für jede von denselben

$$A^2 = (N_{1,1} - N_{1,2} - N_{1,3} - \ldots)^2,$$
$$B^2 = (N_{2,1} - N_{2,2} - N_{2,3} - \ldots)^2,$$
$$C^2 = (N_{3,1} - N_{3,2} - N_{3,3} - \ldots)^2,$$
u. s. w.

Eben so seyen unter jenen s Gleichungen τ solche, in deren jeder die Coefficienten von ξ und v ein anderes Zeichen haben, als die von $\zeta \ldots$; so ist für jede von diesen τ Gleichungen

$$A^2 = (N_{1,1} + N_{1,2} - N_{1,3} - \ldots)^2,$$
$$B^2 = (N_{2,1} + N_{2,2} - N_{2,3} - \ldots)^2,$$
$$C^2 = (N_{3,1} + N_{3,2} - N_{3,3} - \ldots)^2,$$

und so fort. Hieraus folgt:

$$\Sigma A_n^2 = \rho(N_{1,1} + N_{1,2} + N_{1,3} + \ldots)^2 + \sigma(N_{1,1} - N_{1,2} - N_{1,3} - \ldots)^2 + \tau(N_{1,1} + N_{1,2} - N_{1,3} - \ldots)^2 + \ldots,$$
$$\Sigma B_n^2 = \rho(N_{2,1} + N_{2,2} + N_{2,3} + \ldots)^2 + \sigma(N_{2,1} - N_{2,2} - N_{2,3} - \ldots)^2 + \tau(N_{2,1} + N_{2,2} - N_{2,3} - \ldots)^2 + \ldots,$$
$$\Sigma C_n^2 = \rho(N_{3,1} + N_{3,2} + N_{3,3} + \ldots)^2 + \sigma(N_{3,1} - N_{3,2} - N_{3,3} - \ldots)^2 + \ldots,$$
u. s. w.

a) Wendet man dieſs auf den Fall an, wo nur zwei Gröſsen ξ, v aus den s Gleichungen gesucht werden, unter denen ρ solche sind, in deren jeder die Coefficienten von ξ und v einerlei Zeichen haben, also $s - \rho$ solche, in deren jeder die Coefficienten von ξ und v verschiedene Zeichen haben; so sind die Gleichungen (16) für diesen Fall:

$$\Xi = -\mathfrak{D} + \mathfrak{G}\xi + \mathfrak{H}v,$$
$$Y = -\mathfrak{D}' + \mathfrak{G}'\xi + \mathfrak{H}'v;$$

also
$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{H}' - \mathfrak{D}'\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}\mathfrak{H}' - \mathfrak{G}'\mathfrak{H}} \\ \mathfrak{B} &= \frac{\mathfrak{D}'\mathfrak{G} - \mathfrak{D}\mathfrak{G}'}{\mathfrak{G}\mathfrak{H}' - \mathfrak{G}'\mathfrak{H}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (17)$$

und

$$N_{1,1} = \frac{\mathfrak{H}'}{\mathfrak{G}\mathfrak{H}' - \mathfrak{G}'\mathfrak{H}}, \quad N_{1,2} = -\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}\mathfrak{H}' - \mathfrak{G}'\mathfrak{H}},$$

folglich

$$\Sigma A_n^2 = \frac{\rho(\mathfrak{H}' - \mathfrak{H})^2 + (s-\rho)(\mathfrak{H}' + \mathfrak{H})^2}{(\mathfrak{G}\mathfrak{H}' - \mathfrak{G}'\mathfrak{H})^2};$$

das Gewicht der Bestimmung $\xi = \mathfrak{A}$ ist also

$$= \frac{(\mathfrak{G}\mathfrak{H}' - \mathfrak{G}'\mathfrak{H})^2}{\rho(\mathfrak{H}' - \mathfrak{H})^2 + (s-\rho)(\mathfrak{H}' + \mathfrak{H})^2}; \quad . \quad . \quad (18)$$

das Gewicht der Bestimmung $v = \mathfrak{B}$ findet sich eben so

$$= \frac{(\mathfrak{G}\mathfrak{H}' - \mathfrak{G}'\mathfrak{H})^2}{\rho(\mathfrak{G}' - \mathfrak{G})^2 + (s-\rho)(\mathfrak{G}' + \mathfrak{G})^2} \quad . \quad . \quad (19)$$

b) In eben diesem Falle, wo nur zwei Gröſsen gesucht werden, kann man, wie *Laplace* im zweiten *Suppl. à la Théorie anal. des Probab.*, *p.* 39, bemerkt, kürzer so verfahren: nachdem man in allen s Gleichungen die Coefficienten von ξ positiv gemacht hat, addire man zuerst die ρ Gleichungen, in denen auch die Coefficienten von v positiv sind, und dann addire man die $s - \rho$ Gleichungen, in denen die Coefficienten von v negativ sind; aus den zwei auf diese Art erhaltenen Gleichungen bestimme man ξ und v.

Bei diesem Verfahren seyen die den Gleichungen (13) entsprechenden Gleichungen folgende:

$$\left.\begin{aligned} \Xi &= \mathfrak{E}\xi + \mathfrak{F}v - \mathfrak{Q}, \\ Y &= \mathfrak{E}'\xi + \mathfrak{F}'v - \mathfrak{Q}'; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

so ist

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \frac{\mathfrak{Q}\mathfrak{F}' + \mathfrak{Q}'\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}\mathfrak{F}' + \mathfrak{E}'\mathfrak{F}} \\ \mathfrak{B} &= \frac{\mathfrak{Q}\mathfrak{E}' - \mathfrak{Q}'\mathfrak{E}}{\mathfrak{E}\mathfrak{F}' + \mathfrak{E}'\mathfrak{F}} \end{aligned}\right| \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

und

$$N_{1,1} = \frac{\mathfrak{F}'}{\mathfrak{E}\mathfrak{F}' + \mathfrak{E}'\mathfrak{F}}, \quad N_{1,2} = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}\mathfrak{F}' + \mathfrak{E}'\mathfrak{F}}.$$

Der Factor P ist hier $= \pm 1$ für die ρ ersteren, und $= 0$ für die $s - \rho$ letzteren Gleichungen; der Factor

Q ist $= 0$ für die ρ ersteren, und $= \pm 1$ für die $s - \rho$ letzteren Gleichungen. Demnach ist $A = \pm N_{1,1}$ für jede von den ρ ersteren, und $= \pm N_{1,2}$ für jede von den $s - \rho$ letzteren Gleichungen, folglich $\frac{1}{\Sigma A_n^2}$ oder das Gewicht der Bestimmung $\xi = \mathfrak{A}$ hier

$$= \frac{1}{\rho N_{1,1}^2 + (s-\rho) N_{1,2}^2}, \text{ d. h. } = \frac{(\mathfrak{E}\mathfrak{F}' + \mathfrak{E}'\mathfrak{F})^2}{\rho \mathfrak{F}'^2 + (s-\rho)\mathfrak{F}^2} \quad (22)$$

Das Gewicht der Bestimmung $v = \mathfrak{B}$ findet sich eben so

$$= \frac{(\mathfrak{E}\mathfrak{F}' + \mathfrak{E}'\mathfrak{F})^2}{\rho \mathfrak{E}'^2 + (s-\rho)\mathfrak{E}^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Es ist aber $\mathfrak{E}$ die Summe der Coefficienten von ξ in den ρ ersteren, $\mathfrak{E}'$ in den $s - \rho$ letzteren Gleichungen, alle diese Coefficienten positiv genommen, daher

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{E} + \mathfrak{E}',$$

denn $\mathfrak{G}$ ist die Summe der Coefficienten von ξ in sämmtlichen s Gleichungen, alle positiv genommen; ferner

$$\mathfrak{G}' = \mathfrak{E} - \mathfrak{E}',$$

denn $\mathfrak{G}'$ ist die Summe der Coefficienten von ξ in den s Gleichungen, so genommen, dafs die Coefficienten von v durchaus positiv werden, also positiv genommen in den ρ ersteren, und negativ in den $s - \rho$ letzteren Gleichungen.

Eben so ist

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{F} - \mathfrak{F}', \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}',$$
$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{F} + \mathfrak{F}', \quad \mathfrak{D}' = \mathfrak{Q} - \mathfrak{Q}'.$$

Substituirt man diese Werthe von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, u. s. w. in den Ausdrücken (17), (18) und (19), so erhält man die Ausdrücke (21), (22) und (23). Das hier in b) angeführte Verfahren gibt also dieselben Resultate, wie das vorhergehende.

36.

II. Jetzt gebraucht man gewöhnlich die sogenannte *Methode der kleinsten Quadrate*, d. h. man bestimmt die Gröfsen ξ, v, z . . . so, dafs die Summe der Quadrate der Differenzen zwischen den beobachteten und den berechneten Werthen der Functionen F_1, F_2, . . . F_s ein *Minimum* wird, oder man setzt

$$\frac{d \,.\, \Sigma \varepsilon_n^2}{d\xi} = 0, \quad \frac{d \,.\, \Sigma \varepsilon_n^2}{dv} = 0, \quad \frac{d \,.\, \Sigma \varepsilon_n^2}{d\zeta} = 0, \quad \text{u. s. w.},$$

oder $\Sigma a_n \varepsilon_n = 0$, $\Sigma b_n \varepsilon_n = 0$, $\Sigma c_n \varepsilon_n = 0$, u. s. w.

Hier sind also die in Nro. 34. durch P_n, Q_n, R_n . . . bezeichneten Factoren resp. $= a_n$, b_n, c_n . . . Bezeichnen wir ferner mit *Gaufs* die Coefficienten

$N_{1,1}$, $N_{1,2}$, $N_{1,3}$ . . . hier durch $[\alpha^2]$, $[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]$ . . .,
$N_{2,1}$, $N_{2,2}$, $N_{2,3}$ . . . » » $[\beta\alpha]$, $[\beta^2]$, $[\beta\gamma]$ . . .,
$N_{3,1}$, $N_{3,2}$, $N_{3,3}$ . . . » » $[\gamma\alpha]$, $[\gamma\beta]$, $[\gamma^2]$ . . .,
u. s. w.,

und A_n, B_n, C_n . . . durch α_n, β_n, γ_n . . .;

so entsprechen den Gleichungen (15) folgende:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_n = a_n[\alpha^2] + b_n[\alpha\beta] + c_n[\alpha\gamma] + \ldots, \\ \beta_n = a_n[\beta\alpha] + b_n[\beta^2] + c_n[\beta\gamma] + \ldots, \\ \gamma_n = a_n[\gamma\alpha] + b_n[\gamma\beta] + c_n[\gamma^2] + \ldots, \\ \qquad\qquad \text{u. s. w.} \end{array}\right\} \ldots \quad (24)$$

Da die Factoren α_1, . . . α_n, . . . α_s den Gleichungen (2) Genüge leisten, so hat man

$$\Sigma \alpha_n a_n = 1, \quad \Sigma \alpha_n b_n = 0, \quad \Sigma \alpha_n c_n = 0, \quad \ldots \quad (25)$$

Multiplicirt man diese Gleichungen resp. mit $[\alpha^2]$, $[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]$, . . ., so erhält man vermöge der ersten von den Gleichungen (24)

$$\Sigma \alpha_n^2 = [\alpha^2], \quad \ldots \ldots \quad (26)$$

und auf ähnliche Art läfst sich beweisen, dafs

$$\Sigma \beta_n^2 = [\beta^2],$$
$$\Sigma \gamma_n^2 = [\gamma^2]$$

ist, u. s. w.

Ferner ist vermöge der zweiten von den Gleichungen (24)

$$\Sigma \alpha_n \beta_n = [\beta \alpha] \Sigma \alpha_n a_n + [\beta^2] \Sigma \alpha_n b_n + [\beta\gamma] \Sigma \alpha_n c_n + \ldots,$$

d. h. $\Sigma \alpha_n \beta_n = [\beta \alpha]$,

und eben so folgt aus der ersten von den Gleichungen (24):

$$\Sigma \alpha_n \beta_n = [\alpha \beta],$$

also ist $[\alpha\beta] = [\beta\alpha]$ . . . . . . (27)

Eben so läſst sich beweisen, daſs

$$[\alpha\gamma] = \Sigma \alpha_n \gamma_n = [\gamma\alpha], \quad [\beta\gamma] = \Sigma \beta_n \gamma_n = [\gamma\beta]$$

ist, u. s. w.

Daher ist vermöge der ersten von den Gleichungen (24)

$$a_n = a_n \Sigma \alpha_n^2 + b_n \Sigma \alpha_n \beta_n + c_n \Sigma \alpha_n \gamma_n + \ldots,$$

und mithin nach der ersten von den Gleichungen (25)

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma a_n^2 \Sigma \alpha_n^2 + \Sigma a_n b_n \Sigma \alpha_n \beta_n + \Sigma a_n c_n \Sigma \alpha_n \gamma_n + \ldots = 1, \\ \text{und eben so ist} \\ \Sigma a_n b_n \Sigma \alpha_n \beta_n + \Sigma b_n^2 \Sigma \beta_n^2 + \Sigma b_n c_n \Sigma \beta_n \gamma_n + \ldots = \Sigma b_n \beta_n = 1, \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right\} (28)$$

Ferner ist vermöge der Gleichungen (24)

$$\begin{aligned} & \alpha_n \Sigma a_n^2 + \beta_n \Sigma a_n b_n + \gamma_n \Sigma a_n c_n + \ldots \\ = & \; a_n ([\alpha^2] \Sigma a_n^2 + [\beta\alpha] \Sigma a_n b_n + [\gamma\alpha] \Sigma a_n c_n + \ldots) \\ + & \; b_n ([\alpha\beta] \Sigma a_n^2 + [\beta^2] \Sigma a_n b_n + [\gamma\beta] \Sigma a_n c_n + \ldots) \\ + & \; c_n ([\alpha\gamma] \Sigma a_n^2 + [\beta\gamma] \Sigma a_n b_n + [\gamma^2] \Sigma a_n c_n + \ldots) \\ + & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

d. h., wie aus den Gleichungen (27) u. s. w. folgt,

$$= a_n \Sigma a_n \alpha_n + b_n \Sigma a_n \beta_n + c_n \Sigma a_n \gamma_n + \ldots$$

Es ist aber vermöge der ersten von den Gleichungen (2) oder (25) $\Sigma a_n \alpha_n = 1$, und vermöge der Gleichungen (4), (6), ...

$$\Sigma a_n \beta_n = 0, \quad \Sigma a_n \gamma_n = 0, \ldots,$$

folglich

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_n \Sigma a_n^2 + \beta_n \Sigma a_n b_n + \gamma_n \Sigma a_n c_n + \ldots = a_n, \\ \text{und eben so} \\ \alpha_n \Sigma a_n b_n + \beta_n \Sigma b_n^2 + \gamma_n \Sigma b_n c_n + \ldots = b_n, \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right\} (29)$$

a) Vermöge der Gleichungen (25) hat man für irgend ein System von Factoren $A_1, \ldots A_n, \ldots A_s$, die ebenfalls den Gleichungen (2) Genüge leisten:

$$\Sigma A_n a_n = \Sigma \alpha_n a_n, \quad \Sigma A_n b_n = \Sigma \alpha_n b_n,$$
$$\Sigma A_n c_n = \Sigma \alpha_n c_n, \ldots$$

Multiplicirt man diese Gleichungen resp. mit $[\alpha^2]$, $[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]$, ..., so erhält man

$$\Sigma A_n \alpha_n = \Sigma \alpha_n^2,$$

woraus folgt

$$\Sigma A_n^2 = \Sigma \alpha_n^2 + \Sigma (A_n - \alpha_n)^2.$$

Hieraus erhellt, daſs unter allen Systemen von Factoren, welche den Gleichungen (2) Genüge leisten, dasjenige, für welches ΣA_n^2 den kleinsten Werth erhält, ist $A_1 = \alpha_1, \ldots A_n = \alpha_n, \ldots$ Aber nach Nro. 32, a) wird die Bestimmung von ξ am genauesten (die Grenzen des zu befürchtenden Fehlers bei derselben Wahrscheinlichkeit am engsten, oder der wahrscheinliche Fehler am kleinsten, oder das Gewicht am gröſsten), wenn ΣA_n^2 den kleinsten möglichen Werth hat. Demnach ist das Factorensystem $\alpha_1, \ldots \alpha_n, \ldots$ das vortheilhafteste zur Bestimmung von ξ; und eben so läſst sich be-

weisen, daſs das Factorensystem $\beta_1, \ldots \beta_n, \ldots$ das vortheilhafteste zur Bestimmung von v, das Factorensystem $\gamma_1, \ldots \gamma_n, \ldots$ das vortheilhafteste zur Bestimmung von z ist, u. s. w. Diese Factorensysteme werden aber gebraucht, wenn man die Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelt; hier ist nämlich (s. Nro. 34)

$$\mathfrak{A} = \Sigma\, \alpha_n\, \delta_n,$$
$$\mathfrak{B} = \Sigma\, \beta_n\, \delta_n,$$
$$\mathfrak{C} = \Sigma\, \gamma_n\, \delta_n,$$
u. s. w.

Die Methode der kleinsten Quadrate gibt also die genaueste Bestimmung der gesuchten Gröſsen $\xi, v, z \ldots$

b) Das Gewicht der Bestimmung $\xi = \mathfrak{A}$ ist hier nach Nro. 32, a)

$$= \frac{1}{\Sigma\, \alpha_n^2},$$

oder vermöge der Gleichung (26)

$$= \frac{1}{[\alpha^2]};$$

und eben so das Gewicht der Bestimmung $v = \mathfrak{B}$

$$= \frac{1}{[\beta^2]},$$

das Gewicht der Bestimmung $z = \mathfrak{C}$

$$= \frac{1}{[\gamma^2]},$$
u. s. w.

Der wahrscheinliche Fehler der Bestimmung $\xi = \mathfrak{A}$ ist

$$= 0.67449 \sqrt{K' [\alpha^2]},$$
u. s. w.

Wird nur *eine* Gröſse ξ gesucht, so ist der plausibelste Werth von ξ

$$= \mathfrak{A} = \frac{\Sigma a_n \delta_n}{\Sigma a_n^2},$$

und das Gewicht dieser Bestimmung

$$= \Sigma a_n^2.$$

Sind zwei Gröfsen ξ, v unbekannt, und sucht man die plausibelsten Werthe derselben nach der Methode der kleinsten Quadrate, so ist das Gewicht der Bestimmung von ξ

$$= \frac{\Sigma a_n^2 \Sigma b_n^2 - (\Sigma a_n b_n)^2}{\Sigma b_n^2},$$

und das Gewicht der Bestimmung von v

$$= \frac{\Sigma a_n^2 \Sigma b_n^2 - (\Sigma a_n b_n)^2}{\Sigma a_n^2}.$$

c) Was in Nro. 33. mit E bezeichnet wurde, das ist hier

$$= \Sigma \varepsilon_n^2 - 2\mathfrak{M} + \mathfrak{N},$$

wo

$$\mathfrak{M} = \Sigma a_n \varepsilon_n \Sigma \alpha_n \varepsilon_n + \Sigma b_n \varepsilon_n \Sigma \beta_n \varepsilon_n + \Sigma c_n \varepsilon_n \Sigma \gamma_n \varepsilon_n + \ldots$$

und

$$\begin{aligned}\mathfrak{N} = \Sigma \alpha_n \varepsilon_n (&\Sigma \alpha_n \varepsilon_n \Sigma a_n^2 + \Sigma \beta_n \varepsilon_n \Sigma a_n b_n + \Sigma \gamma_n \varepsilon_n \Sigma a_n c_n + \ldots) \\ + \Sigma \beta_n \varepsilon_n (&\Sigma \alpha_n \varepsilon_n \Sigma a_n b_n + \Sigma \beta_n \varepsilon_n \Sigma b_n^2 + \Sigma \gamma_n \varepsilon_n \Sigma b_n c_n + \ldots) \\ + \Sigma \gamma_n \varepsilon_n (&\Sigma \alpha_n \varepsilon_n \Sigma a_n c_n + \Sigma \beta_n \varepsilon_n \Sigma b_n c_n + \Sigma \gamma_n \varepsilon_n \Sigma c_n^2 + \ldots) \\ + \ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

ist. Dieser Ausdruck für $\mathfrak{N}$ ist vermöge der Gleichungen (29) dem für $\mathfrak{M}$ gleich, folglich

$$E = \Sigma \varepsilon_n^2 - \mathfrak{M} = \Sigma \varepsilon_n^2 - \Sigma a_n \varepsilon_n \Sigma \alpha_n \varepsilon_n - \Sigma b_n \varepsilon_n \Sigma \beta_n \varepsilon_n - \Sigma c_n \varepsilon_n \Sigma \gamma_n \varepsilon_n - \ldots \quad (30)$$

G ist hier

$$= 2r - \Sigma a_n^2 \Sigma \alpha_n^2 - \Sigma a_n b_n \Sigma \alpha_n \beta_n$$
$$- \Sigma a_n c_n \Sigma \alpha_n \gamma_n - \ldots$$
$$- \Sigma a_n b_n \Sigma \alpha_n \beta_n - \Sigma b_n^2 \Sigma \beta_n^2$$
$$- \Sigma b_n c_n \Sigma \beta_n \gamma_n - \ldots$$
$$- \Sigma a_n c_n \Sigma \alpha_n \gamma_n - \Sigma b_n c_n \Sigma \beta_n \gamma_n$$
$$- \Sigma c_n^2 \Sigma \gamma_n^2 - \ldots$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

d. h. vermöge der Gleichungen (28)

$$= 2r - r = r,$$

was sich auch leicht aus dem Ausdrucke (30) ableiten läſst.

Daher ist nach Nro. 33, a) der genäherte Werth von K'

$$= \frac{\Sigma \lambda_n^2}{s - r},$$

wo $\lambda_1, \ldots \lambda_n, \ldots$ die Werthe bezeichnen, welche die Functionen $l_1 - F_1, \ldots l_n - F_n, \ldots$ erhalten, wenn man in denselben für ξ, v, z . . . ihre plausibelsten Werthe $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$. $\mathfrak{C}$, . . . substituirt, oder wo $\Sigma \lambda_n^2$ der kleinste Werth von $\Sigma (l_n - F_n)^2$ ist.

Der mittlere Werth des Quadrats des bei dieser Bestimmung von r zu befürchtenden Fehlers ist nach Nro. 33, a)

$$m^2 = \frac{V' - V^2}{(s - r)^2} = \frac{V' - (s - r)^2 K'^2}{(s - r)^2}.$$

Nach Nro. 33, b) hat man

$$V' = (s - 2r) K''' + (s - 1)(s - 2r) K'^2 + H$$

oder

$$= (s - 2r)(K''' - K'^2) + (s - r)^2 K'^2 - r K'^2 + H,$$

wo H der mittlere Werth von

$$\mathfrak{M}^2 = (\Sigma a_n \varepsilon_n \Sigma \alpha_n \varepsilon_n + \Sigma b_n \varepsilon_n \Sigma \beta_n \varepsilon_n$$
$$+ \Sigma c_n \varepsilon_n \Sigma \gamma_n \varepsilon_n + \ldots)^2$$

ist. Nun ist der mittlere Werth von $(\Sigma a_n \varepsilon_n \Sigma \alpha_n \varepsilon_n)^2$

oder von

$$(\Sigma a_n^2 \varepsilon_n^2 + 2 \Sigma a_n \varepsilon_n a_{n'} \varepsilon_{n'}) \times (\Sigma \alpha_n^2 \varepsilon_n^2 + 2 \Sigma \alpha_n \varepsilon_n \alpha_{n'} \varepsilon_{n'})$$
$$= K''' \Sigma a_n^2 \alpha_n^2 + K'^2 (\Sigma a_n^2 \Sigma \alpha_n^2 - \Sigma a_n^2 \alpha_n^2)$$
$$+ 4 K'^2 \Sigma a_n \alpha_n a_{n'} \alpha_{n'},$$

oder, da

$$2 \Sigma a_n \alpha_n a_{n'} \alpha_{n'} = (\Sigma a_n \alpha_n)^2 - \Sigma a_n^2 \alpha_n^2 = 1 - \Sigma a_n^2 \alpha_n^2$$

ist,

$$= (K''' - 3K'^2) \Sigma a_n^2 \alpha_n^2 + K'^2 (2 + \Sigma a_n^2 \Sigma \alpha_n^2);$$

ferner der mittlere Werth von $\Sigma a_n \varepsilon_n \Sigma \alpha_n \varepsilon_n \Sigma b_n \varepsilon_n \Sigma \beta_n \varepsilon_n$

$$= K''' \Sigma a_n b_n \alpha_n \beta_n$$
$$+ K'^2 (\Sigma a_n \alpha_n b_{n'} \beta_{n'} + \Sigma a_n b_n \alpha_{n'} \beta_{n'} + \Sigma a_n \beta_n \alpha_{n'} b_{n'})$$
$$= K''' \Sigma a_n b_n \alpha_n \beta_n$$
$$+ K'^2 (\Sigma a_n \alpha_n \Sigma b_n \beta_n - \Sigma a_n \alpha_n b_n \beta_n)$$
$$+ K'^2 (\Sigma a_n b_n \Sigma \alpha_n \beta_n - \Sigma a_n b_n \alpha_n \beta_n)$$
$$+ K'^2 (\Sigma a_n \beta_n \Sigma \alpha_n b_n - \Sigma a_n \beta_n \alpha_n b_n),$$

oder, da

$$\Sigma a_n \alpha_n = 1, \quad \Sigma b_n \beta_n = 1, \quad \Sigma a_n \beta_n = 0, \quad \Sigma \alpha_n b_n = 0$$

ist,

$$= (K''' - 3K'^2) \Sigma a_n \alpha_n b_n \beta_n + K'^2 (1 + \Sigma a_n b_n \Sigma \alpha_n \beta_n);$$

und eben so der mittlere Werth von

$$\Sigma a_n \varepsilon_n \Sigma \alpha_n \varepsilon_n \Sigma c_n \varepsilon_n \Sigma \gamma_n \varepsilon_n$$
$$= (K''' - 3K'^2) \Sigma a_n \alpha_n c_n \gamma_n + K'^2 (1 + \Sigma a_n c_n \Sigma \alpha_n \gamma_n),$$

u. s. w. Nimmt man diese Ausdrücke zusammen, so erhält man den mittlern Werth von $\mathfrak{M} \Sigma a_n \varepsilon_n \Sigma \alpha_n \varepsilon_n$ mit Anwendung der ersten von den Gleichungen (28)

$$= (K''' - 3K'^2) \Sigma a_n \alpha_n (a_n \alpha_n + b_n \beta_n + c_n \gamma_n + \ldots)$$
$$+ (r + 2) K'^2.$$

Addirt man hiezu die analogen Ausdrücke für $\mathfrak{M} \Sigma b_n \varepsilon_n \Sigma \beta_n \varepsilon_n$, für $\mathfrak{M} \Sigma c_n \varepsilon_n \Sigma \gamma_n \varepsilon_n$ u. s. w., so findet man

$$H = (K''' - 3K'^2)\,\Sigma(a_n\,\alpha_n + b_n\,\beta_n + c_n\,\gamma_n + \ldots)^2 + (r^2 + 2r)\,K'^2,$$

also

$$V' = (s-r)(K''' - K'^2) + (s-r)^2 K'^2 - (K''' - 3K'^2) \times \times [r - \Sigma(a_n\,\alpha_n + b_n\,\beta_n + c_n\,\gamma_n + \ldots)^2]$$

und

$$V' - V^2 = (s-r)(K''' - K'^2) - (K''' - 3K'^2) \times \times [r - \Sigma(a_n\,\alpha_n + b_n\,\beta_n + c_n\,\gamma_n + \ldots)^2], \quad (31)$$

mithin

$$m^2 = \frac{K''' - K'^2}{s-r} - \frac{K''' - 3K'^2}{(s-r)^2}[r - \Sigma(a_n\,\alpha_n + b_n\,\beta_n + c_n\,\gamma_n + \ldots)^2],$$

(vergl. *Gaufs Theor. combin. obs. art.* 39.)

Nimmt man an, dafs $\varphi x = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2 x^2}$ sey, so verwandelt sich dieser Ausdruck in den einfachen

$$m^2 = \frac{2K'^2}{s-r}.$$

Setzt man nach Nro. 33, b) und c) den genäherten Werth von $K' = \frac{1}{s}\,\Sigma\,\lambda_n^2$, so ist der mittlere Werth des Quadrats des bei dieser Bestimmung von K' zu befürchtenden Fehlers vermöge der Gleichung (11)

$$m'^2 = \frac{1}{s^2}[V' - V^2 + r^2 K'^2],$$

wo man für $V' - V^2$ den Ausdruck (31) hat; nimmt man an, dafs $\varphi x = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2 x^2}$ sey, so ist

$$m'^2 = \frac{1}{s^2}(2s - 2r + r^2)\,K'^2.$$

Nach Nro. 33, b) ist $m'^2 < m^2$, d. h. diese letztere Bestimmung von K' genauer als die erstere, wenn

$$(2s - r)\,m^2 > r\,K'^2$$

ist, oder, vorausgesetzt, daſs $\varphi x = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$ sey, wenn

$$4s - 2r > (s-r)r$$

$$\text{oder} \quad 4s > r(s+2-r)$$

ist. Diese Bedingung wird für $r=1$, $r=2$, $r=3$ und $r=4$ immer erfüllt, hingegen für $r=5$ nur wenn $s<15$, für $r=6$ nur wenn $s<12$ ist, u. s. w.

d) Durch die Berechnung der Gröſsen $\lambda_1, \ldots \lambda_n, \ldots$ findet man die Unterschiede der durch die einzelnen Beobachtungen gegebenen Werthe der Functionen $F_1, \ldots F_n, \ldots$ von den aus sämmtlichen Beobachtungen nach der vortheilhaftesten Methode durch Rechnung abgeleiteten. Dabei kann nun leicht der Fall eintreten, daſs man eine von den Beobachtungen zu sehr von dem Resultate sämmtlicher Beobachtungen abweichend findet, und daher dieselbe ausschlieſsen will. In diesem Falle kann man, ohne die Rechnung vom Anfang an zu wiederholen, die Resultate, welche man mit Ausschlieſsung jener Beobachtung erhalten haben würde, aus den mit Beibehaltung derselben gefundenen auf folgende Art ableiten:

Die in Nro. 34. durch Ξ, Y, Z, ... bezeichneten Gröſsen sind hier resp.

$$= -\Sigma a_n \varepsilon_n, \quad -\Sigma b_n \varepsilon_n, \quad -\Sigma c_n \varepsilon_n, \ldots,$$

und vermöge der Gleichungen (14) hat man unbestimmt, wenn man die Gleichungen (27) u. s. w. berücksichtigt:

$$\xi = \mathfrak{A} + [\alpha^2]\,\Xi + [\alpha\beta]\,Y + [\alpha\gamma]\,Z + \ldots,$$
$$\upsilon = \mathfrak{B} + [\alpha\beta]\,\Xi + [\beta^2]\,Y + [\beta\gamma]\,Z + \ldots,$$
$$\zeta = \mathfrak{C} + [\alpha\gamma]\,\Xi + [\beta\gamma]\,Y + [\gamma^2]\,Z + \ldots,$$

u. s. w.

Nun wolle man z. B. die n^{te} Beobachtung ausschliessen, und durch diese Ausschlieſsung gehen Ξ, Y, Z, ..., $\mathfrak{A}$ u. s. w. in Ξ', Y', Z', ..., $\mathfrak{A}'$ u. s. w. über; so wird

man auch haben:

$$\xi = \mathfrak{A}' + [\alpha'^2]\,\Xi' + [\alpha\beta']\,Y' + [\alpha\gamma']\,Z' + \ldots,$$
$$\upsilon = \mathfrak{B}' + [\alpha\beta']\,\Xi' + [\beta'^2]\,Y' + [\beta\gamma']\,Z' + \ldots,$$

u. s. w.,

wo $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, ... die neuen plausibelsten Werthe von ξ, υ, ..., und $\frac{1}{[\alpha'^2]}$, $\frac{1}{[\beta'^2]}$, ... die Gewichte dieser Bestimmungen von ξ, υ, ... sind.

Es ist aber

$$\Xi' = -(\Sigma\, a_n\, \varepsilon_n - a_n\, \varepsilon_n) = \Xi + a_n\, \varepsilon_n$$
$$\text{oder}\quad \Xi = \Xi' - a_n\, \varepsilon_n,$$

und eben so

$$Y = Y' - b_n\, \varepsilon_n,$$
$$Z = Z' - c_n\, \varepsilon_n,$$

u. s. w.

Ferner ist vermöge der Gleichungen (1)

$$\varepsilon_n = \delta_n - a_n\, \xi - b_n\, \upsilon - c_n\, \zeta - \ldots$$
$$= \delta_n - a_n\, \mathfrak{A} - b_n\, \mathfrak{B} - c_n\, \mathfrak{C} - \ldots$$
$$- \alpha_n\, \Xi - \beta_n\, Y - \gamma_n\, Z - \ldots,$$

oder, da $\delta_n - a_n\, \mathfrak{A} - b_n\, \mathfrak{B} - c_n\, \mathfrak{C} - \ldots = \lambda_n$ ist,

$$\varepsilon_n = \lambda_n - \alpha_n\, \Xi - \beta_n\, Y - \gamma_n\, Z - \ldots$$
$$= \lambda_n - \alpha_n\, \Xi' - \beta_n\, Y' - \gamma_n\, Z' - \ldots$$
$$+ a_n\, \alpha_n\, \varepsilon_n + b_n\, \beta_n\, \varepsilon_n + c_n\, \gamma_n\, \varepsilon_n + \ldots,$$

folglich

$$\varepsilon_n = \frac{1}{R}(\lambda_n - \alpha_n\, \Xi' - \beta_n\, Y' - \gamma_n\, Z' - \ldots),$$

wenn man der Kürze wegen R für

$$1 - a_n\, \alpha_n - b_n\, \beta_n - c_n\, \gamma_n - \ldots$$

schreibt.

Substituirt man diesen Werth von ε_n in dem unbestimmten Ausdrucke

$$\xi = \mathfrak{A} + [\alpha^2]\,\Xi + [\alpha\beta]\,Y + [\alpha\gamma]\,Z + \ldots$$
$$= \mathfrak{A} + [\alpha^2]\,\Xi' + [\alpha\beta]\,Y' + [\alpha\gamma]\,Z' + \ldots - \alpha_n\, \varepsilon_n,$$

so erhält man

$$\xi = \mathfrak{A} - \frac{a_n \lambda_n}{R} + \left([\alpha^2] + \frac{a_n^2}{R}\right) \Xi' + \left([\alpha\beta] + \frac{a_n \beta_n}{R}\right) Y'$$
$$+ \left([\alpha\gamma] + \frac{a_n \gamma_n}{R}\right) Z' + \ldots$$

Setzt man hier $\Xi' = 0$, $Y' = 0$, $Z' = 0$, . . ., so erhält man den neuen plausibelsten Werth von ξ oder

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} - \frac{a_n \lambda_n}{R}.$$

Nimmt man aber bloſs den Coefficienten von Ξ in dem vorhergehenden unbestimmten Ausdrucke für ξ, so erhält man

$$[\alpha'^2] = [\alpha^2] + \frac{a_n^2}{R}.$$

Auf ähnliche Art findet man

$$\mathfrak{B}' = \mathfrak{B} - \frac{\beta_n \lambda_n}{R},$$

$$[\beta'^2] = [\beta^2] + \frac{\beta_n^2}{R},$$

u. s. w.,

wo überall $R = 1 - a_n \alpha_n - b_n \beta_n - \ldots$ ist.

37.

a) In dem Falle Nro. 32, b) gilt das in Nro. 36, a) b) in Beziehung auf die Gleichungen (1) Gesagte für die Gleichungen (8). Die Bestimmung von ξ wird am genauesten, wenn man die Factoren A_1^*, . . . A_n^*, . . . (s. Nro. 32, b) so wählt, daſs ΣA_n^{*2}, oder die Factoren A_1, . . . A_n, . . . so, daſs $\Sigma A_n^2 \mu_n^2$ den kleinsten möglichen Werth erhält; eben so verhält es sich mit der Bestimmung von v, z . . . Man findet hier die plausibelsten Werthe von ξ, v, z . . ., wenn man $\Sigma \left(\frac{l_n - F_n}{\cdot}\right)^2$ zu einem *Minimum* macht, oder wenn man setzt

$$\Sigma a_n^* \varepsilon_n^* = 0, \quad \Sigma b_n^* \varepsilon_n^* = 0, \quad \Sigma c_n^* \varepsilon_n^* = 0, \text{ u. s. w.:}$$

oder

$$\Sigma \frac{a_n \varepsilon_n}{\mu_n^2} = 0, \quad \Sigma \frac{b_n \varepsilon_n}{\mu_n^2} = 0, \quad \Sigma \frac{c_n \varepsilon_n}{\mu_n^2} = 0, \text{ u. s. w.},$$

oder

$$\left.\begin{aligned}
0 &= -\Sigma \frac{a_n \delta_n}{\mu_n^2} + \xi \Sigma \frac{a_n^2}{\mu_n^2} + \upsilon \Sigma \frac{a_n b_n}{\mu_n^2} \\
&\qquad + \zeta \Sigma \frac{a_n c_n}{\mu_n^2} + \ldots, \\
0 &= -\Sigma \frac{b_n \delta_n}{\mu_n^2} + \xi \Sigma \frac{a_n b_n}{\mu_n^2} + \upsilon \Sigma \frac{b_n^2}{\mu_n^2} \\
&\qquad + \zeta \Sigma \frac{b_n c_n}{\mu_n^2} + \ldots, \\
0 &= -\Sigma \frac{c_n \delta_n}{\mu_n^2} + \xi \Sigma \frac{a_n c_n}{\mu_n^2} + \upsilon \Sigma \frac{b_n c_n}{\mu_n^2} \\
&\qquad + \zeta \Sigma \frac{c_n^2}{\mu_n^2} + \ldots, \\
&\text{u. s. w.}
\end{aligned}\right\} (32)$$

Die bei der unbestimmten Elimination erscheinenden Coefficienten dienen zur Bestimmung der Genauigkeit der Resultate, wie in Nro. 36, b), wobei K'_1 oder der mittlere Werth des Quadrats des Fehlers einer Beobachtung von der Art, zu welcher die erste von den vorliegenden Beobachtungen gehört, an die Stelle des obigen K' zu setzen ist, oder das Gewicht der ersten Beobachtung als Einheit für die Gewichte der Bestimmungen gilt.

Wird nur *eine* Gröſse ξ gesucht, so ist der plausibelste Werth von ξ

$$= \frac{\Sigma \frac{a_n \delta_n}{\mu_n^2}}{\Sigma \frac{a_n^2}{\mu_n^2}},$$

und der wahrscheinliche Fehler dieser Bestimmung

$$= 0.67449 \sqrt{\frac{K'_1}{\Sigma \frac{a_n^2}{\mu_n^2}}},$$

oder das Gewicht dieser Bestimmung, das Gewicht der ersten Beobachtung als Einheit angenommen,

$$= \Sigma \frac{a_n^2}{\mu_n^2}.$$

Bei zwei unbekannten Gröſsen ξ, v ist das Gewicht der plausibelsten Bestimmung von ξ

$$= \frac{\Sigma \frac{a_n^2}{\mu_n^2} \Sigma \frac{b_n^2}{\mu_n^2} - \left(\Sigma \frac{a_n b_n}{\mu_n^2}\right)^2}{\Sigma \frac{b_n^2}{\mu_n^2}},$$

und das Gewicht der plausibelsten Bestimmung von v

$$= \frac{\Sigma \frac{a_n^2}{\mu_n^2} \Sigma \frac{b_n^2}{\mu_n^2} - \left(\Sigma \frac{a_n b_n}{\mu_n^2}\right)^2}{\Sigma \frac{a_n^2}{\mu_n^2}}.$$

Das in Nro. 36, c) Gesagte läſst sich hier anwenden, wenn man K'_1 an die Stelle des obigen K' setzt, und unter $\Sigma \lambda_n^2$ den Werth von $\Sigma \left(\frac{l_n - F_n}{\mu_n}\right)^2$ versteht, in den Functionen $F_1, \ldots F_n, \ldots$ für ξ, v, ζ . . . ihre plausibelsten Werthe gesetzt.

b) In dem Falle Nro. 32, c) gilt das in Nro. 36. in Beziehung auf die Gleichungen (1) Gesagte für die Gleichungen (9), wobei $L^2 = K' - K^2$ an die Stelle des obigen K' zu setzen ist.

Um die plausibelsten Werthe von K, ξ, v . . . zu finden, muſs man setzen

$$\Sigma f_n = 0, \quad \Sigma a_n f_n = 0, \quad \Sigma b_n f_n = 0, \quad \text{u. s. w.},$$

oder

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -\Sigma \delta_n + sK + \xi \Sigma a_n + v \Sigma b_n + \ldots, \\ 0 &= -\Sigma a_n \delta_n + K \Sigma a_n + \xi \Sigma a_n^2 + v \Sigma a_n b_n + \ldots, \\ 0 &= -\Sigma b_n \delta_n + K \Sigma b_n + \xi \Sigma a_n b_n + v \Sigma b_n^2 + \ldots, \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}\right\} (33)$$

α) Wird aufser K nur *eine* Gröfse ξ gesucht, so ist der plausibelste Werth von K

$$= \frac{\Sigma a_n^2 \Sigma \delta_n - \Sigma a_n \Sigma a_n \delta_n}{s \Sigma a_n^2 - (\Sigma a_n)^2},$$

und der wahrscheinliche Fehler dieser Bestimmung

$$= 0.67449 \, L \sqrt{\frac{\Sigma a_n^2}{s \Sigma a_n^2 - (\Sigma a_n)^2}};$$

ferner der plausibelste Werth von ξ

$$= \frac{s \Sigma a_n \delta_n - \Sigma a_n \Sigma \delta_n}{s \Sigma a_n^2 - (\Sigma a_n)^2},$$

und der wahrscheinliche Fehler dieser Bestimmung

$$= 0.67449 \, L \sqrt{\frac{s}{s \Sigma a_n^2 - (\Sigma a_n)^2}}.$$

Die in den Nennern dieser Ausdrücke vorkommende Gröfse $s \Sigma a_n^2 - (\Sigma a_n)$ ist der Summe der Quadrate der Differenzen je zweier von den Factoren $a_1, \ldots a_n, \ldots a_s$ gleich, daher ist diese Bestimmung von K und ξ unbrauchbar, wenn alle diese Factoren einander gleich oder nur wenig von einander verschieden sind.

β) Es bezeichne λ_n den bestimmten Werth von $l_n - F_n$ oder von

$$\delta_n - a_n \xi - b_n v - \ldots,$$

und Λ_n den bestimmten Werth von $l_n - F_n - K$ oder von

$$\delta_n - K - a_n \xi - b_n v - \ldots,$$

wenn man für K, ξ, v . . . ihre durch die Gleichungen (33) gegebenen plausibelsten Werthe substituirt; so ist $\lambda_n = \Lambda_n + K$, also, da vermöge der ersten von den Gleichungen (33) $\Sigma \Lambda_n = 0$ ist,

$$\Sigma \lambda_n^2 = \Sigma \Lambda_n^2 + s K^2.$$

Dem genäherten Ausdrucke für K' nach Nro. 33, b) und c) entspricht hier der genäherte Ausdruck für L^2

oder für $K' - K^2$

$$= \frac{1}{s} \Sigma \Delta_n^2;$$

hieraus erhält man einen genäherten Werth von K'

$$= \frac{1}{s} \Sigma \Delta_n^2 + K^2$$

oder

$$= \frac{1}{s} \Sigma \lambda_n^2.$$

Dem genäherten Ausdrucke für K' nach Nro. 33, a) und Nro. 36, c) entspricht hier der genäherte Ausdruck für $K' - K^2$

$$= \frac{\Sigma \Lambda_n^2}{s - r - 1},$$

da hier zu den r gesuchten Gröfsen ξ, v . . . noch K als gesuchte Gröfse hinzugekommen ist. Hieraus erhält man einen genäherten Werth von K'

$$= \frac{1}{s - r - 1} \left[\Sigma \Delta_n^2 + (s - r - 1) K^2\right]$$

oder

$$= \frac{1}{s - r - 1} \left[\Sigma \lambda_n^2 - (r + 1) K^2\right].$$

(Die Fortsetzung folgt.)

IV.

Analyse des Meteoreisens von Bohumiliz;

vom

Med. Dr. Ritter von *Holger.*

(Vorgetragen in der physikalisch-chemischen Section der Versammlung der deutschen Naturforscher und Ärzte zu Hamburg am 21. September 1830.)

Dieses neue merkwürdige Meteoreisen ist das jüngste dieser Art. Es wurde im Herbste 1829 bei *Bohumiliz* im Prachiner Kreise in Böhmen gefunden, indem die Pflugschar eines Ackermannes, in ihrem Laufe aufgehalten, den Pflüger aufforderte, die Ursache dieses Aufenthaltes genauer zu erforschen. Von seinem Fall ist nichts bekannt, nur im Vertrauen auf die Haltbarkeit der bekannten Gründe nimmt man seinen meteorischen Ursprung an. Es wog 103 Pf. Baron *Franz* von *Malăvă* auf Skalic verehrte es dem böhmischen National-Museum, dieſs übersandte dem k. k. Naturalien-Cabinette zu Wien ein Stück, welches Herrn von *Widtmanstätten* zur Herstellung einer geätzten Fläche mitgetheilt wurde. Von den bei dieser Gelegenheit abgesägten Resten erhielt ich einen zur ersten Analyse; die zweite machte ich von Feilspänen, die mir Hr. von *Widtmanstätten* mit der Bemerkung übergab, daſs sie vollkommen rein wären, und höchstens einen kleinen Überschuſs von Eisen enthalten könnten, wie es sich denn später auch so ausweisen wird.

Da bisher bloſs eine vorläufige Analyse desselben von Prof. *Steinmann* bestand, welcher sich bloſs auf die Nachweisung des Nickelgehaltes beschränkte, so war es noch immer Zeit, eine neue zu versuchen, zumal es

nicht durch zu ofte Versuche bestätiget werden kann, daſs die acht Bestandtheile, deren Mehrzahl ich zuerst in den Meteoreisenmassen auffand, sich auch wirklich in allen dergleichen Körpern vorfinden.

Die ausführliche Beschreibung dieser Masse findet sich zusammt *Steinmann's* Analyse in den Jahrbüchern des böhmischen Museums, Bd. I., Heft II., Jahrgang 1830. Sie gehört zu den *derben nickelhältigen Gediegeneisenmassen*, ist sichtbar zusammengesetzt, und läſst sich in dünnen abgesägten Stücken oder an den Ecken durch Hammerschläge in die Theilmassen trennen. Sowohl an dem Stücke, welches ich der ersten Analyse unterwarf, als an der groſsen geätzten Fläche waren diese kleineren Bestandstücke der ganzen Masse deutlich zu unterscheiden, und da sie sich durch lichteres und dunkleres Grau auffallend auszeichneten, so läſst sich vermuthen, daſs nicht leicht bei einem Meteoreisen die quantitativen Analysen so abweichend seyn werden, als bei diesen. Auſserdem bemerkt man noch Einfassungsleisten der beiden Massen, welche von speiſsgelber Farbe sind, und die man für Schwefelkies halten möchte. Dann waren noch zwei schwarze Flecken auf der geätzten Fläche sichtbar, die nur unvollkommen von der Säure angegriffen wurden, und deren einer das Ende eines gekrümmten, durch die ganze Masse laufenden Zapfens zu seyn schien.

Im Chlor löste sich die Masse gleichförmig auf, ohne daſs ein Gerippe, wie bei andern Massen, zurückblieb; auch bemerkte ich weder ausgeschiedenen Schwefel, noch den mindesten Geruch nach entbundenem Hydrothiongas. Dieſs bestärkte mich in der Vermuthung, daſs die Masse selbst nicht, sondern nur die Einfassungsleisten Schwefel enthielten. Denn läugnen konnte ich sein Vorhandenseyn nicht, da ihn *Steinmann* und *Widtman-*

stätten deutlich darin nachgewiesen hatten, und andererseits war ich sicher, dafs das zur ersten Analyse verwendete Stück nichts von den Einfassungsleisten enthalten hatte, und die zur zweiten Analyse verwendeten Feilspäne konnten nichts davon enthalten, wiewohl diefs sehr schwer anzunehmen ist, da das sich entbindende Hydrothiongas durchaus nicht hätte verborgen bleiben können, indem ich nach ihm mit besonderer Aufmerksamkeit forschte. Das Chlor liefs einen Körper unaufgelöset, der, wie *Steinmann* angibt, theils als dunkelgraues Pulver, theils als lichtgraue, metallisch glänzende Blättchen sich zeigte, und den ich mit ihm für *Eisencarbonid* halte. Er war, wie die Analysen lehrten, stets in wechselnden Verhältnissen vorhanden, und daher als Gemengtheil anzusehen.

Durch einen Strom Hydrothiongas wurde aus der sauren Auflösung nichts gefällt. Als sie dann neutral gemacht wurde, fällte benzoesaures Kali das Eisenoxyd. Hierauf wurden aus der rückständigen Lauge die übrigen Oxyde durch carbonsaures Kali ausgeschieden, und es blieb, was noch bei keiner früheren Analyse der Fall war, ein Körper in dem carbonsauren Kali aufgelöset. Dieser war noch mit Thonerde verunreiniget, konnte aber durch carbonsaures Ammoniak, worin er allein auflöslich war, von ihr getrennt werden. Da er sich in ätzendem und carbonsaurem Kali und in *carbonsaurem Ammoniak* leicht löste, und aus seiner Auflösung in Säuren durch reines Ammoniak weifs gefällt wurde, auch aus seiner Auflösung in carbonsaurem Ammoniak durch blofses Erwärmen mit weifser Farbe sich ausschied, konnte ich ihn mit allem Grunde für *Glycinerde* halten, und sonach wurde das *Glycium* hier zum ersten Male als Bestandtheil der Meteoreisenmassen aufgefunden.

Die gefällten Oxyde waren apfelgrün, bei der zwei-

ten Analyse aber, wo nicht alles Eisen durch das benzoesaure Kali gefällt wurde, dunkelgrün vom carbonsauren Eisenoxydul. Sie wurden in Salpetersäure gelöset, und die Lösung durch Ammoniak zerlegt. *Nickel* und *Kobalt* blieben aufgelöset, deren ersteres durch Ätzlauge, letzteres durch Schwefelammoniak ausgeschieden wurde.

Der durch Ammoniak erhaltene Niederschlag wurde wieder in Salpetersäure gelöset, und die Lösung durch carbonsaures Ammoniak zerlegt. *Kalk* und *Magnesia* blieben nun aufgelöset, und wurden durch kleesaures Ammoniak und durch phosphorsaures Natron getrennt. Hiebei hatte aber das carbonsaure Ammoniak wieder etwas *Beryllerde* aufgelöset, es wurde daher die Lösung, bevor noch das kleesaure Ammoniak zugesetzt wurde, mit Salpetersäure gesättigt, dann durch reines Ammoniak die *Beryllerde* ausgeschieden.

Der in carbonsaurem Ammoniak unlösliche Niederschlag enthielt noch *Eisen*, *Mangan*, *Thonerde*, *Beryllerde*, und bei der zweiten Analyse etwas *Nickel*. Er wurde in Ätzlauge gekocht, diese löste Thon- und Beryllerde auf. Die Auflösung wurde dann zuerst mit Salpetersäure neutralisirt, dann mit einem Überschuſs von carbonsaurem Ammoniak versetzt, der die Thonerde fällte und die Beryllerde zurückhielt; letztere wurde dann durch Ätzammoniak auf die angegebene Weise abgeschieden, und zugleich mit der früher gefundenen gewaschen, getrocknet, gewogen und auf Beryllium berechnet.

Was das Kali zurückliefs, wurde in Salpetersäure gelöset, daraus durch benzoesaures Kali zuerst der letzte Rest von *Eisen*, dann durch carbonsaures Kali das *Mangan* gefällt. Bei der zweiten Analyse war letzterer Niederschlag ganz apfelgrün, weil mit der gröſseren Menge

Eisen auch etwas Nickel zurückgehalten worden war. Er mufste daher neuerdings in Salpetersäure gelöset, und in aufgelöstes Nickel- und ausgefälltes Manganoxyd durch carbonsaures Ammoniak zerlegt werden. Endlich wurde das Nickeloxyd durch Ätzlauge gefällt, es war jedoch nicht ganz vom Manganoxyde frei.

In dem vom Chlor ungelöset gelassenen Eisencarbonide war das Eisen nicht so leicht, als in dem der Cap'schen Masse nachzuweisen. Durch das Glühen mit Salpetersäure wurde es nicht rothbraun. Erst als die geglühte Masse in concentrirter *aqua reginae* gekocht wurde, löste sich Eisen in der Säure auf, und konnte durch Reagentien darin nachgewiesen werden; allein gänzliche Zerlegung der Masse wäre erst durch wiederholtes Ausglühen und Kochen mit Säure möglich gewesen.

Von diesem Eisencarbonide erhielt ich bei der ersten Analyse 1.34 (nach *Steinmann* 1.12), bei der zweiten 4.78. Es waren daher auflösliche Bestandtheile bei der ersten Analyse 98.66, bei der zweiten 95.22; diese enthielten folgende Gewichtsmengen der einzelnen Bestandtheile:

	Erste Analyse.	Zweite Analyse.
Eisen	86.67	83.67
Nickel	8.12	7.83
Kobalt	0.59	0.60
Mangan . . .	0.46	0.58
Calcium . . .	0.41	1.08
Glycium . . .	0.12	0.10
Alumium . . .	0.32	0.42
Magnium . . .	0.13	0.10
	96.82.	94.38.
Verlust . . .	1.84.	00.84.

Da ich keinen Grund habe, eine der beiden Analysen für verläſslicher als die andere zu halten, indem ich mir bei keiner von beiden eines merkbaren Versehens bewuſst bin, so scheint daraus zu folgen, daſs kein bleibendes Verhältniſs der Bestandtheile in diesen Meteoreisenmassen anzutreffen sey, was ich wohl nie in ihnen zu finden hoffte. Nur das Verhältniſs der Hauptbestandtheile: *Eisen* und *Nickel*, ist, mit Rücksicht auf die ungleiche Menge unauflöslicher Bestandtheile, nach beiden Analysen dasselbe, die Mengen der Nebenbestandtheile scheinen aber keiner Regel zu folgen. Auffallend war es mir, daſs ich Eisen und Nickel hier in derselben Menge, wie im Eisen von Lénarto fand, ich wage aber nicht, darauf einen Schluſs zu gründen, selbst wenn die *Widtmanstätt*'schen Figuren beider Massen, wie es bei flüchtiger Betrachtung zu seyn scheint, einige Übereinstimmung zeigen sollten. — Daſs ich hier das *Glycium* fand, welches ich in keiner früheren Masse auffinden konnte, läſst erwarten, daſs man auch noch mehrere Metalle in solchen Massen auffinden wird. Dafür fand ich aber hier kein *Silicium*, wie in den Massen von Lénarto und Agram, und, noch in keiner Masse *Chrom*, die Ellenbogner ausgenommen, welches doch von Andern in diesen Körpern schon gefunden wurde. Immer geben daher die vielen quantitativen und qualitativen Abweichungen in der Zusammensetzung dieser Körper wenig Hoffnung, eine sichere, empirische Basis unserer Theorien zu finden, und wir scheinen nach so vielen Jahren noch immer nicht einmal an der Schwelle der Werkstätte zu stehen, in welcher diese merkwürdigen Körper bereitet werden.

V.

Ein Beitrag zu der Seite 88 beschriebenen Filtrir- und Extractionsmaschine;

von

Joseph Knezaurek.

Der von mir angegebene Filtrir- und Extractionsapparat hat zum Zwecke, durch Verdichtung der atmosphärischen Luft, welche in den Apparat eingeschlossen und durch Wasser gesperrt ist, das Filtriren und Extrahiren zu beschleunigen.

Damals ist es mir aber nicht eingefallen, daſs durch das entgegengesetzte Verfahren, nämlich durch Verdünnung der atmosphärischen Luft, derselbe Endzweck erreicht werden könne. Es handelte sich nun um Construirung eines solchen Filtrirapparates, in welchem die eingeschlossene Luft verdünnt, und dadurch das Gleichgewicht zwischen ihr und der äuſsern atmosphärischen Luft aufgehoben wird.

Der in Fig. 26 dargestellte Apparat leistet dieses: *abcd* ist ein Cylinder von verzinntem Eisen- oder Kupferblech, der oben offen, unten aber verschlossen ist. In diesem Cylinder befindet sich ein anderer *efop* von demselben Materiale, der mit ersterem auf demselben, nur etwas kleinerem Boden befestiget, oben aber ebenfalls offen ist. Bis *mn* wird Wasser oder irgend eine andere, ziemlich dichte metallische Salzauflösung eingefüllt, die jedoch auf das Metall, aus welchem der Filtrirapparat verfertiget ist, keine chemische Einwirkung hat, um das Oxydiren des Metalls zu verhüten. In den inneren Cylinder *efop* wird zum Auffangen der filtrirten oder extrahirten Flüssigkeit ein Gefäſs aus Glas, Porzellan, Zinn etc. aufgestellt. Der Cylinder *ihrs* end-

lich, ebenfalls aus demselben Materiale verfertigt, hat oben einen zinnernen Trichter *q* von 90° oder 45° fest eingelöthet, unten bei *rs* ist derselbe offen, oben hat er zu beiden Seiten flache Handhaben. An dem obern Theil dieses Cylinders ist eine kleine Pippe angebracht, um Luft in den Apparat einzulassen, und um den Cylinder, der bis *mn* in die Sperrflüssigkeit eingesenkt ist, bequem herauszuziehen, endlich um die extrahirte oder filtrirte Flüssigkeit aus dem untergestellten Gefäſse herausnehmen zu können.

Ist so weit alles vorgerichtet, so wird in den Cylinder *efop* das zum Auffangen der filtrirten Flüssigkeit bestimmte Gefäſs aufgestellt, der mit dem Trichter versehene Cylinder *ihrs* in die Sperrflüssigkeit so tief eingesenkt, bis er mit seinen zwei flachen Handhaben *ih* bei *ab* aufliegt, die Pippe geöffnet, und in den Filtrir- oder Extrahirtrichter, der mit Flieſspapier, Leinwand etc. unter vorerwähnten Winkeln von 90° oder 45° inwendig belegt ist, die zu extrahirende oder zu filtrirende Flüssigkeit langsam bis zu der punctirten Linie eingegossen. Sodann verschlieſst man die Pippe, hebt den Cylinder *ihrs* bei den zwei flachen Handhaben *ih* etwas in die Höhe (z. B. in die Lage, in welcher er gezeichnet ist), und stellt zwei Bretchen auf *ab*, die so hoch sind, als der Hub beträgt, unter die zwei Handhaben. Durch dieses Emporheben des Filtrircylinders wird die in den Apparat durch die Sperrflüssigkeit eingeschlossene atmosphärische Luft etwas verdünnt, und die innere Sperrflüssigkeit steigt etwas in die Höhe, während dem die äuſsere sich in demselben Verhältnisse senkt. Die äuſsere und dichtere atmosphärische Luft wirkt nur vermöge ihrer gröſsern Expansivkraft auf das auf dem Filtrum vorhandene Fluidum, und das Filtriren oder Extrahiren geht schnell vor sich. Am Ende öffnet man die Pippe, und hebt den Cylinder aus der Sperr-

flüssigkeit heraus, um die durchfiltrirte Flüssigkeit ausheben zu können.

Je höher der Hub des Filtrircylinders gestellt wird, um desto mehr wird die innere eingeschlossene Luft verdünnt, und das Filtriren geht desto schneller vor sich.

Oft ist es sehr wünschenswerth, schnell zu filtriren, besonders, wenn man es mit vegetabilischen Auflösungen zu thun hat, die schnell durchgetrieben werden müssen, weil sie sonst sich oft zersetzen, und durch Aufnahme atmosphärischen Sauerstoffes ihre Natur verändern. Bei solchen Extractionen ist auch das schnelle Beendigen der Arbeit sehr zu empfehlen, weil bei längerem Aufschub und Verweilen auf dem Filtrum oft Stoffe aufgelöst werden, die man in der Auflösung nicht zu haben wünscht. Dieses ist besonders der Fall, wenn man Vegetabilien extrahirt, die in ihrer chemischen Mischung Gerbestoff und Gallussäure enthalten, deren es so viele gibt.

Verweilt man etwas länger mit der Extraction, so wird der Gerbestoff und die Gallussäure auch mit extrahirt, und verunreinigt und verändert auf diese Art das Extract.

Dieses soll besonders bei pharmaceutischen Arbeiten eben so berücksichtiget werden, so wie man vermeiden soll, die Siedhitze anzuwenden, und zu viel Extractionsfluidum auf die zu extrahirende Substanz aufzugieſsen, weil sich sonst oft die schwerer auflöslichen Bestandtheile mit auflösen, die nicht jedes Mal zur Wesenheit des Extracts gehören, und weil der in vielen Pflanzen vorhandene vegetabilische Eiweiſsstoff durch die Siedhitze coagulirt, und das in seine coagulirte Masse eingeschlossene Extract der übrigen extrahirten Masse gleichsam mechanisch entzogen wird, und daher verloren geht.

VI.
Über die Härte der Krystalle;

vom

Prof. *M. L. Frankenheim* in Breslau.

(Beschlufs.)

---

37) Nachdem wir nun die wissenschaftliche Bedeutung der bei den Phänomenen der Cohäsion anzuwendenden Begriffe, so weit es zu unserem Zwecke Noth thut, festgestellt haben, können wir uns der Untersuchung dessen, worin eigentlich die *Härte* bestehe, ausschliefsend zuwenden.

Wenn ich z. B. einen Krystall mittelst einer eisernen Nadel zu ritzen versuche, so mufs ich zuerst den Widerstand zu überwinden suchen, der aus der Elasticität des Krystalls und des Eisens entsteht. Dieser Widerstand steigt, bis er die Grenze der Reaction in jenem Körper, bei dem sie kleiner ist, erreicht. Sobald aber die Nadel mit einer Kraft geführt wird, welche die Grenze der Reaction des Krystalles und des Eisens übersteigt, so kann der Widerstand nicht mehr wachsen, und wenn die Reaction des Krystalls die kleinere ist, so widerstehen und geben seine Theile der Bewegung der Nadel mit gleich bleibender Stärke nach. Von zwei der Einwirkung derselben Nadel unterworfenen Körpern wird jener mit geringerer Kraft geritzt, bei dem die Grenze der Reaction niedriger liegt. Allein jene dem Ritzen widerstehende Kraft nennen wir *Härte*, so dafs die Grenzen der Reaction zweier Körper, falls sie auf gleichförmige Weise beobachtet werden, dieselben Gesetze befolgen und in denselben Ursachen gegründet sind, wie die Härte.

Doch waltet zwischen der Kraft, durch welche ein Körper zerrissen oder seine Theile verschoben werden, und zwischen der Härte der Unterschied ob, daſs diese bloſs von der Beschaffenheit des Körpers, jene aber grossen Theils auch von der Gestalt des Körpers und der Art der Einwirkung, und nicht bloſs von der Gröſse der Berührungsfläche, sondern auch vom Verhältniſs der Länge zur Dicke abhängt. Denn die Gröſse des Widerstandes nimmt mit der Dicke zu, so daſs bei einem kurzen Körper das Gewicht, welches eine bleibende Veränderung mittelst eines Druckes hervorbringt, oft um vieles gröſser ist, als das, was diese Veränderung durch Ausdehnung oder Beugung erzeugen soll. Daher kann ein Krystall oft von einem, unter sonst gleichen Umständen durchaus nicht härteren, so z. B. können die Flächen eines Körpers durch seine Ecken und Kanten, der Diamant durch sein Pulver geritzt werden. Man darf daher nicht fragen, ob der Krystall oder das ritzende Metall, sondern man muſs die Untersuchung darauf beschränken, wer aus zweien mit derselben Nadel geritzten Krystallen der härtere sey *).

---

*) Zwei ganz glatte Flächen werden durch die wechselseitige Reibung durchaus nicht angegriffen, sondern nur, wenn eine derselben rauh ist. Bei der Reibung von Flächen ungleicher Härte werden beide angegriffen, jedoch der harte Körper bei kleiner Oberfläche stärker als der weichere bei groſser, wie eine Scheibe weichen Eisens und Kupfers, die mit einer bestimmten Geschwindigkeit um ihre Axe gedreht, und an eine dünne Feder oder ein Rädchen, oder einen gezahnten Stift aus Stahl, oder an den Rand eines harten Steines gerieben wird. Wenn bei der Wechselwirkung zweier Körper der eine auch eine Spannung oder einen Seitenzug erleidet, so kann, auch wenn er der härtere ist, seine Reaction kleiner werden, und er eher brechen, als der weichere; so kann

Die Härte fällt also mit der Grenze der Reaction zusammen, in so fern diese auf der Beschaffenheit der Körper beruht; der Unterschied zwischen beiden liegt lediglich in dem, was man durch die Beobachtung zu finden sucht, da nämlich der Werth der Reaction durch Zahlen bestimmt und durch die Härte nur der Ort zu bezeichnen gesucht wird, den der beobachtete Körper in der Reihe der Reactionen einnimmt. Ohne Zweifel gewährt die Kenntniſs des erstern Verhältnisses mehr Nutzen, allein es ist nur in seltenen Fällen bestimmbar. Denn jene Körper, die in hinlänglicher Gröſse vorkommen, wie z. B. die Metalle, haben keine gleichförmige Textur, und die Krystalle, die wohl letztere Eigenschaft besitzen, haben wieder keine zur Erforschung ihrer Cohäsion durch Gewichte taugliche Form. Hiezu kommt, daſs bei den meisten und selbst von den genauesten Beobachtern angestellten Versuchen so groſse Fehler unterlaufen sind, daſs man aus diesen Versuchen kaum die Härtenfolge der Körper herstellen könnte, und man daher bei so bewandten Umständen mit anhaltendem Fleiſse und nur einiger Geschicklichkeit durch die Untersuchung des Ritzens Unterschiede zu entdecken vermag, die bis jetzt noch keiner Derjenigen, die den verwickelteren Weg eingeschlagen haben, aufzufinden im Stande war.

38. Doch um auf den eigentlichen Zweck der Untersuchung, die Härteunterschiede in demselben Körper, zurück zu kommen, so beweisen diese augenscheinlich eine nach den verschiedenen Richtungen wechselnde Grenze der Reaction. Indeſs thut es vor Allem Noth, daſs wir zum bessern Verständniſs der oben dargestell-

---

ein an einem oder an beiden Enden geklemmter Stahlstab mittelst eines hölzernen Hammers oder durch die Rauhigkeiten eines rotirenden Rades gekrümmt werden.

ten Versuche erforschen, welche Reaction Körper von wechselnder Cohäsionskraft der Nadel beim Ritzen entgegensetzen: Der Widerstand sowohl der dehn- als der brechbaren Körper äuſsert sich zwar zuerst auf gleiche Weise, allein wenn die Kraft, womit die Nadel gestrichen wird, die Grenze der Reaction übersteigt, so offenbart sich der Unterschied beider Körper, die Theile der letztern werden gebrochen, jene der erstern verschoben. In den verschobenen Theilen kann aber leicht nicht nur der Widerstand und die Reaction gesteigert, sondern auch die krystallographische Richtung der Theile geändert, und die ohnedieſs nur geringen Unterschiede der Beobachtung ganz entzogen werden (s. §. 10.). Indeſs ist bei weitem der gröſste Theil der Salze und Steine so brechbar, daſs ihre Theile durch die Nadel entweder von einander getrennt werden, oder wenigstens keine Änderung rücksichtlich der Grenze der Reaction erleiden. Nur darf man die Nadel nicht zu stark streichen, weil sonst auch die entfernteren Theile brechen.

Am besten wäre es, und man würde die gröſsten Härteunterschiede erhalten, wenn man auf die Körper so einwirken könnte, daſs ihre Theile nur in bestimmten Richtungen von einander getrennt werden, in allen andern aber an einander haften bleiben. Allein da jeder Theil der Oberfläche mit allen andern zusammenhängt, so kann diese einseitige Trennung nicht durchgesetzt werden, aber dennoch können jene erwähnten Härteunterschiede nie verschwinden, wie uns die Erfahrung und folgende Schlüsse überzeugen.

39) An Krystallen, die uns nur Ebenen und Kanten darbieten, haben auch die Krystallographen bis jetzt nur die Eigenschaften dieser Ebenen untersucht, aber die Richtungen der anziehenden Kräfte müssen auf die zu

den geritzten Flächen senkrechten (Normalen) bezogen werden. Untersuchen wir nun die Cohärenz der Krystalle in der auf die geritztwerdende Fläche senkrechten Richtung *A*, *B* sey die der Bewegung der ritzenden Nadel parallele Richtung, und *C* eine dritte, auf beide senkrechte. Die Cohärenz in der Richtung *A* ist es nun, welche die in der Richtung *B* sich bewegende Nadel zuerst zu überwinden hat. Die streichende Nadel ritzt nämlich die betreffende Fläche desto leichter, je mehr sie dem Drucke nachgibt, und die am meisten geritzte Fläche übt demnach auch die geringste Reaction auf die Nadel aus.

40) Allein aus der Reaction dieser Kraft, die nach allen auf der geritzten Ebene möglichen Linien gleich stark wirkt, können unmöglich die §. 7—18 beschriebenen Unterschiede entstanden seyn, und müssen daher aus den Verschiedenheiten der Reaction in Richtungen, welche der geritzten Ebene parallel sind, erklärt werden. Sobald die Nadel sich einmal eine Furche gebildet hat, und in dieser fortbewegt wird, so werden die *vor* derselben liegenden Theile zusammengedrückt, die Grenze der Reaction wird überschritten und brechen. Ob dieser Bruch nun wirklich bloſs durch Compression geschieht, oder, was wahrscheinlicher ist, durch die Ausdehnung, die da immer obwaltet, wo die Körper bloſs an einem Theile ihrer Oberfläche zusammengedrückt werden, übergehe ich hier. Aber so viel bleibt ausgemacht, daſs die Theile in der Richtung der Bewegung *B* stärker zusammengedrückt werden, als die in der Richtung *C* oder in was immer für einem andern gegen die Richtung der Nadel unter einem rechten oder schiefen Winkel geneigten Richtungen liegenden Theile. Der Widerstand gegen die Nadel ist daher ein Integrale der Gröſse der einzelnen Functionen und des Neigungs-

winkels. Würden bloſs die Theile der Richtung *B* wirken, und wäre die Reaction aller übrigen Theile = o, so würden die Linien, wo der kleinste oder gröſste Widerstand Statt findet, den Richtungen der kleinsten und gröſsten Reaction parallel seyn; aber wo auch die Theile anderer Richtungen ihren Einfluſs äuſsern, da ist es möglich, daſs sie nicht mit den Richtungen der gröſsten und kleinsten Reaction zusammenfallen, allein auf keinen Fall können sie weit von denselben entfernt liegen, und zwar um so weniger, je gröſser die Unterschiede zwischen dem Maximum und Minimum des Widerstandes sind. Wenn das Gesetz des Zusammenhanges der Cohärenz mit der Lage der Axen, und des Widerstandes mit dem Neigungswinkel gegen die Richtung der Nadel bekannt wäre, so könnte das hier Angedeutete mathematisch aus einander gesetzt werden *).

41) Noch habe ich der Beobachtungen nicht erwähnt, welche den Einfluſs der dem Striche parallelen Linien beweisen. Man findet nämlich nicht bloſs in verschiedenen Ebenen oder in verschiedenen Linien derselben Ebene, sondern auch in derselben Richtung derselben Ebene Härteunterschiede, je nachdem man in der einen oder in der entgegengesetzten Richtung streicht. Nehmen wir einen rhomboëdrischen Kalk, denn an ihm sind diese Härteunterschiede am leichtesten zu entdecken, er ist spröde, ziemlich gleichförmig, und seine Oberflache läſst sich, wegen der groſsen Spaltbarkeit, oft erneuen, und daher die Beobachtung häufig wieder-

*) Jener Theil dieser Function, der von der Lage der Axen abhängt, kann durch die Erscheinungen der Polarisation des Lichtes in Krystallen mit ziemlicher Genauigkeit bestimmt werden; einen Beitrag hiezu hoffe ich bald liefern zu können. Der zweite Theil scheint von dem Cosinus des Neigungswinkels abzuhängen.

holen. Die Linien des gröfsten Widerstandes sind die den längeren Diagonalen parallelen, die des kleineren sind den Kanten und kürzern Diagonalen parallel, die ersteren liegen stets zwischen zwei scharfen oder zwei stumpfen Kanten, alle andern zwischen einer stumpfen und einer scharfen. Bei diesen letztern Linien nun zeigt sich ein äufserst verschiedener Widerstand, wenn man ein Mal von der stumpfen Kante zur scharfen hinüber, und das andere Mal von der scharfen zur stumpfen hinüber streicht; stets ist der erstere der gröfsere. So sind es unter allen Linien auf den Flächen des Rhomboëders blofs die den längern Diagonalen parallelen, die, in beiden Richtungen gestrichen, denselben Härtegrad zeigen; ohne Zweifel wegen der symmetrischen Kanten, von denen sie begrenzt werden. So besitzt die kürzere Diagonale, welche in der einen Richtung eine beinahe jener der längeren Diagonale gleiche Härte zeigt, in der andern Richtung von dem schärfern zum stumpfern Ecke die kleinste am ganzen Krystalle. Ähnliche Erscheinungen bemerkte ich auch an andern Krystallen, besonders auffallend am salpetersauren Natrum, das, so wie in der äufsern Form, auch in allen Härteverhältnissen dem kohlensauren Kalke gleicht.

42) Was nun auch die Ursache dieser Erscheinung ist, so ist sie wenigstens an die Bedingung gebunden, dafs eine Theilungsfläche unter einem stumpfen Winkel gegen die Streichlinie geneiget ist, wo dann jene Richtung die gröfsere Härte zeigt, die gegen die durch den Anfang der Linie gehende Theilungsfläche unter einem stumpfen Winkel geneigt ist, jene die geringere, deren Neigungswinkel ein spitzer ist. Die längere Diagonale ist gegen beide Theilungsflächen, gegen die eine unter einem stumpfen, gegen die andere unter einem spitzen Winkel geneigt, daher hebt eine Wirkung die

andere auf; hingegen bei der kürzern Diagonale, die gegen beide Theilungsflächen unter einem gleichen Winkel geneigt ist, addiren sich beide Wirkungen. Bei jenen Varietäten des rhomboëdrischen Kalkspathes, wo die Kantenecken des Rhomboëders durch die Flächen des sechsseitigen Prismas weggenommen sind, konnte man keine Wirkungen der Art entdecken; und wirklich sind da alle Linien entweder zu einer Theilungsfläche unter einem spitzen, zu den beiden andern unter einem stumpfen Winkel oder umgekehrt geneigt, oder wo sie einer Spaltungsrichtung parallel sind, sind sie gegen eine der beiden andern unter einem spitzen, gegen die zweite unter einem stumpfen Winkel geneigt, so daſs die Wirkungen der Theilungsrichtungen sich entweder ganz aufheben, oder wenigstens wechselseitig schwächen.

43) So konnte auch am Anhydrite mit aller Mühe keine Härtedifferenz gefunden werden, weil die Theilungsflächen unter rechten Winkeln gegen einander geneigt sind, und daher keine Verschiedenheit hinsichtlich der Richtungen der Nadel obwalten kann. Dasselbe findet bei allen auf die Axen des zwei- und zweigliedrigen Systems senkrechten Ebenen Statt, und hindert die genaue Untersuchung an vielen Körpern, deren Theilungsrichtungen, an denen sich die kleinen Härteunterschiede fast allein zeigen, den Flächen parallel sind. Beim Gyps zeigt die Ebene der gröſsten Theilbarkeit durchaus keinen Härteunterschied, während sie in auf diese senkrechten Ebenen, die gegen einander unter einem schiefen Winkel geneigt sind, deutlich hervortritt, so daſs in jeder dieser Ebenen die der Richtung der gröſsten Theilbarkeit parallelen, d. i. die horizontalen Linien, einen gröſsern Widerstand in der Richtung zur scharfen verticalen Kante, als in der zur stumpfen leisten. Ähnliche Erscheinungen entdeckt man an einigen

Prismen und Grenzflächen desselben und auch des zwei- und zwei-, so wie des zwei- und eingliedrigen Systems, allein in den Grenzflächen des sechsgliedrigen und drei- und dreigliedrigen Systems konnte man, mit aller Mühe, keine Spur derselben bemerken, obgleich z. B. an jedem Dreiecke eines nach der Richtung der Flächen theilbaren Octaëders drei schiefwinklige Spaltungsrichtungen vorhanden sind. Aus diesen Beobachtungen, so gering deren Anzahl ist, läſst sich doch auf folgende Weise das allgemeine Gesetz derselben ableiten.

44) Die Function, welche wir suchen, hängt von drei Gröſsen ab: 1) von dem Neigungswinkel α der Theilungsfläche gegen die Ebene der Beobachtung, 2) von dem Winkel β der Kante mit der Streichlinie, 3) von der Kraft ν der Theilbarkeit *(fissionis)*. Diese Kraft, die wir noch ausführlicher abzuhandeln haben, von welcher alle Unterschiede in der Gestalt, Wirkung auf das Licht, Wärmeverhältnisse und Härte der Körper, mit einem Worte alles abhängt, wodurch sich feste Körpor von flüssigen unterscheiden, wirkt sicherlich nach allen Richtungen im Innern des Körpers, allein nach dem Vorgange *Brewster's*, *Fresnel's* und Anderer bei ihren Untersuchungen über die Polarisation des Lichtes sey es uns einstweilen, bis zur vollständigen Beweisführung, gestattet, alles auf gewisse symmetrisch liegende Linien und Ebenen zu beziehen, denen beinahe durchaus auch bei spröden Körpern die Richtung der Theilbarkeit entspricht.

45) Wir haben nun bewiesen, daſs, falls die Theilungsfläche auf die Streichlinie senkrecht steht, keine Verschiedenheit in der Härte Statt finde, allein eine desto gröſsere, je kleiner der Neigungswinkel ist; ferner heben die Wirkungen zweier Theilungsflächen, deren eine unter dem Winkel α, die andere unter dem Winkel $180 - \alpha$ gegen die Streichlinie geneigt sind, sich

wechselseitig auf. Diese letztere Eigenschaft theilen zwar alle Functionen des Cosinus mit einander, allein unter diesen ist die Function cos. α gewiſs die einfachste; die erste Eigenschaft hingegen kommt allen Functionen des Sinus von β zu, unter welchen also wiederum sin. β die einfachste ist.

Die Abhängigkeit der Härte von den Winkeln α und β wird also durch cos. α sin. β ausgedrückt. Und wirklich erklären sich aus diesem Gesetze, warum bei den drei schief-, jedoch gleich geneigten Theilungsflächen des Octaëders, bei dem sechsseitigen Prisma des rhomboëdrischen Kalkspathes, wo zwei Theilungsflächen unter demselben, die dritte unter einem verschiedenen Winkel gegen die Streichlinie geneigt sind, durchaus keine Verschiedenheit entdeckt werden kann.

46) Bei den jetzt erwähnten Beispielen war die Kraft der Theilbarkeit überall gleich groſs, aber sonder Zweifel werden bei den Körpern, die nach den verschiedenen Richtungen ungleiche Theilbarkeit besitzen, jene Linien keinen Härteunterschied zeigen, in denen die Summe ν cos. α sin. $\beta = 0$ ist. Allein ν cos. α ist nichts anders als die Projection der Theilbarkeitsrichtung auf die Beobachtungsfläche, und ν cos. α sin. β jener Theil derselben, der auf die Richtung der Streichlinie selber projicirt ist, und der für sich allein oder durch Verbindung mit anderen Gröſsen derselben Art auf Null gebracht, alle Härteunterschiede aufhebt. Die Kraft, aus welcher die Härteunterschiede entspringen, wirkt also nach denselben Gesetzen des Gleichgewichtes, wie die bewegenden Kräfte. Hieraus kann nun zwar nicht mit Sicherheit gefolgert werden, daſs auch die Unterschiede in der Stärke des Widerstandes nach den verschiedenen Richtungen sich nach denselben Gesetzen richten, da die Gröſse der Einwirkung der anliegenden Linien nicht

ausgemittelt werden kann, und die Versuche nicht hinreichen, den Unterschied in der Gröfse der Reaction dem Grade nach bestimmt anzugeben: allein so viel bleibt wahrscheinlich, dafs das Gesetz des Wechsels des Widerstandes nicht viel von dem Verhältnisse ν cos. α sin. β abweichen könne.

47) Auch darf man nicht vergessen, dafs hier nur die Bedingungen, an die das Eintreten der erwähnten Erscheinungen geknüpft ist, nicht aber die dynamische Ursache derselben dargestellt wurde. Die Anhänger der atomistischen Theorie *Hauy's*, dafs der Krystall aus einer Anzahl unendlich kleiner Krystalle von der primitiven Form bestehe, werden leicht einsehen, ja darin einen Beleg für ihre Ansicht finden, dafs die Theile der Oberfläche in der Richtung vom scharfen zum stumpfen Ende weniger Widerstand leisten, als in der entgegengesetzten; die aber einer anderen Ansicht über Krystalle zugethan sind, werden in dem aufgestellten Gesetze zugleich die Erklärung der Erscheinung sehen.

48) Aus diesen Beobachtungen kann man auch entnehmen, dafs es bei Untersuchung der Härte nicht allein auf den Zusammenhang der verschiedenen Linien, sondern auch auf den der Theile einer und derselben Linie unter einander ankomme, und nur mit Rücksicht auf die verschiedenen Streichrichtungen und die daraus entspringenden Härteunterschiede in einer und derselben Linie kann man mit Zuverläfsigkeit ausmitteln, in welcher Linie die kleinste, in welcher die gröfste Cohärenz sey, oder welche aus allen auf die beobachtete Ebene senkrechten Ebenen am stärksten oder schwächsten mit den ihnen parallelen Linien zusammenhängen. So kann man aus den an der glänzendsten Fläche des Gypses gemachten Beobachtungen bestimmen, auf wel-

che der beiden andern Theilungsflächen die kleinere, auf welche die gröſsere Cohärenz senkrecht stehe, und aus den gröſsten Verschiedenheiten der auf die Spaltungsrichtungen senkrechten Linien kann man entnehmen, daſs die der streifigen Theilungsfläche parallelen Flächen die geringere, und die der muscheligen parallele die gröſsere Cohärenz besitzen.

Aus den Beobachtungen der Härte an den Flächen der gröſsten Theilbarkeit des Baryts geht hervor, daſs jene die scharfe Kante des schiefwinkeligen Prismas hinwegnehmende Fläche eine stärkere Cohäsionskraft habe, als die an der stumpfen Kante liegende, dagegen im Anhydrite und ähnlichen Körpern besitzen die Flächen *A* die geringste, die Flächen *B* eine gröſsere, und die Flächen *C* die gröſste Cohäsion, und die Fläche an der scharfen Kante des schiefwinkeligen Prismas eine geringere als die an der stumpfen.

49) Das hier von der Lage der Ebenen der gröſsten und kleinsten Cohärenz Gesagte und aus den Beobachtungen an einer und derselben Ebene Gefolgerte wird auch durch Beobachtungen an verschiedenen Ebenen bestätiget, und überhaupt erweist sich durchaus das Gesetz als gültig, daſs jene Ebenen, auf welche die Linien der geringsten Härte senkrecht stehen, auch der Bewegung der Nadel mit der geringsten Kraft widerstehen.

50. An den Abstumpfungen der körp. Winkel beobachtet man dieselben Gesetze wie an denen der ebenen Winkel und Kanten. An jenen Hexaëdern, bei welchen die den Diagonalen der Flächen parallelen Linien härter sind, als die Kanten, bei denen sind stets die Abstumpfungen der Ecke, nämlich die Octaëderflächen, härter als die Hexaëderflächen. Weil alle Winkel rechte sind, so kann an der Abstumpfungsfläche keine Ver-

schiedenheit eintreten. Am rhomboëdrischen Kalke sind die Flächen, die in die stumpfen Ecke gelegt werden, bei weitem härter und cohärenter, als die Abstumpfungen der scharfen Ecke, und die Flächen des sechsseitigen Prismas, durch welche die Ecke an den Seitenkanten weggenommen werden, sind viel härter als die Flächen des Rhomboëders. Bei Krystallen, deren Grundgestalt ein spitzeres Rhomboëder ist, ist das Härteverhältniſs dem beim Kalkspathe beobachteten wahrscheinlich ganz entgegengesetzt *).

51) Bis jetzt haben wir die Gesetze der Härte oder der Grenze der Reaction dargestellt; zur Kenntniſs der Cohäsion ist aber auch Einsicht in die Gesetze der Elasticität erforderlich. Allein in dieser Hinsicht sind noch gar keine Versuche gemacht, auch sind sie sehr schwierig anzustellen. Wahrscheinlich wechselt auch diese Kraft mit den Richtungen, und wenn man das an verschiedenen Körpern Beobachtete auf die verschiedenen Richtungen eines und desselben Körpers beziehen darf, so ist die Elasticität desto gröſser, je gröſser die Grenze der Reaction ist; allein um das Gesetz mit Bestimmtheit auszumitteln, muſs man andere Untersuchungen anstellen, als es hier geschehen konnte. So viel ist aber gewiſs, daſs die Stärke und die Grenze der Elasticität in einem und demselben Körper jede eine Function der andern sey.

---

*) Vergl. die Abhandlung *Brewster's* in den *Phil. Trans.* vom Jahre 1818, wo er ein ähnliches Gesetz bei den Polarisationserscheinungen des Lichtes in den verschiedenartigen Krystallen nachweist, und welche so wie jede andere über Polarisation des Lichtes von diesem scharfsinnigen und fleiſsigen Beobachter gewiſs eben so viel Aufmerksamkeit verdient, als die Arbeiten *Fresnel's* und anderer Franzosen.

Vom Verhältnisse der Cohäsion zu den übrigen Eigenschaften der Krystalle.

52) Es erübriget nun, da die verschiedenen Härteunterschiede beschrieben, die Natur der Härte erörtert, und die Cohärenzverhältnisse der Körper, so weit dieses ohne krystallographische Theorie geschehen konnte, dargestellt sind, noch Einiges zu erwähnen, das durch die Verschiedenheit der Cohärenz der Krystalle Licht erhält. Dahin gehört aber alles, wodurch sich Krystalle von anderen Körpern unterscheiden. Die chemische Mischung und Proportion, das spec. Gewicht, der Zusammenhang der Theile der Elasticität, die Kräfte, welche die Elasticität bedingen und bei der Fortpflanzung des Lichtes und der Wärme thätig sind, was von der Natur der Krystalle abhängt, wie die Gestalt, Theilbarkeit, Polarisation des Lichtes und Wirkung der Wärme, alles dieses steht mit der Cohäsion im engsten Zusammenhange. Je verschiedener die Cohäsionskraft nach den verschiedenen Richtungen ist, je mehr die Gestalt von der Kugelform abweicht, desto bedeutender ist die relative polarisirende Kraft, desto gröfser sind die Unterschiede der Ausdehnung durch die Wärme. Wir können daher behaupten, dafs alle jene Erscheinungen, die an Krystallen anders ausfallen, als an andern nach allen Richtungen gleichförmigen Körpern, blofs in der verschiedenen Vertheilung der Cohäsion ihren Grund haben. Zwar fehlt noch viel, um Alles erklären zu können, allein mit Zeit und Mühe darf man fest hoffen, den gegenwärtig noch dichten Schleier, welcher den Zusammenhang zwischen Licht, Wärme, Electricität und der Cohäsion verhüllt, lüften zu können.

53) Die Gestalt der Körper hängt theils von innern, theils von äufsern Kräften ab, bei Flüssigkeiten walten die letztern, unter welche auch die Schwere gerechnet

werden muſs, bei festen Körpern die erstern vor, wiewohl auch sehr Vieles, z. B. die Krümmung der Oberfläche, das Aneinanderreihen der einzelnen Krystalle, und welche Flächen aus der ganzen Reihe der einzelnen kleinen Krystalle entstehen, durch äuſsere Kräfte bestimmt wird. Nun hat zwar schon *Hauy* durch sein Gesetz der rationalen Verhältnisse die Eigenschaften aller Flächen derselben Reihe ausgemittelt, allein warum bei einer bestimmten Cohäsion eben diese und keine andere Reihe entstehe, warum sich die secundären Flächen in ihrer Härte anders als jene der Grundgestalt verhalten, warum die Krystalle, es möge nun durch Abdampfung oder durch Ausscheidung aus Auflösungen, oder durch Verbindung mehrerer kleiner Krystalle geschehen, sich stets so vergröſsern, daſs die neuen Flächen den alten parallel bleiben, bedarf und verdient wohl eine eigene Erklärung.

54) Auch in dem Streite der Krystallographen, ob die Lage der Flächen stets auf unter einander senkrechte Axen oder bald auf rechtwinkelige, bald auf schiefe zu beziehen sey, geben die Härtebeobachtungen eine entscheidende Stimme für die letzte Meinung ab. Ja sie zeigen sogar, daſs in manchen Krystallen, wo man die Lage der Flächen ohne besondern Zwang auf gerade Axen reduciren kann, die schiefen Axen den geraden vorzuziehen sind, wie bei vielen Gestalten des zwei- und zweigliedrigen Systems, so daſs das rhomboëdrische System mit gleichen Axen und Winkeln das einfache unter allen schiefwinkeligen ist. Bei manchen Krystallen bedarf es nicht einmal einer genauen Untersuchung der Härte und der Winkel, sondern lediglich der Beachtung des Charakters der Flächenverbindung, um die Schiefe der Axen ersichtlich zu machen. So hat *Neumann* die Krystallgestalt der Axinite (*Pogg.* Ann. IV.) zwar aus der Annahme

gerader Axen gut zu erklären, jedoch die Formeln nicht einfach darzustellen vermocht. Nimmt man aber die Flächen *M*, *P*, *y* (wie sie in *Neumann's* Darstellung bezeichnet werden) als die der Grundgestalt, und die Linien, die durch den Durchschnitt der Flächen gebildet werden, als die Axen oder Einheiten des Systemes an, so erhalten alle andern Ebenen, nach der *Weiſs*'schen Bezeichnungsart, solche Formeln, daſs die Krystallgestalt des Axiniten unter die einfachsten der Wissenschaft zu zählen kommt. Denn die Coefficienten der Axen sind meistens ∞, 1 manchmal 2, in einem einzigen Falle (bei den Flächen σ) 3, niemals eine höhere Zahl. Ähnliche Bemerkungen drängen sich uns beim Malachit, beim Arsenikkies, deren Krystalle von *Wakkernagel* (*Kastn.* Archiv, V.) nach *Weiſs's* Methode trefflich beschrieben worden sind, und bei den meisten andern Krystallen der minder regulären Systeme auf. Kurz, ich nehme keinen Anstand, zu behaupten, daſs bei allen Systemen mit drei gleichen oder ungleichen, geraden oder schiefen Axen die Bildung der Flächen dieselbe sey, oder daſs bei rechter Wahl der Axen die Formeln für die secundären Flächen aus denen der primären durch Vorsetzung der Coefficienten ∞, 0, 1, 2, sehr selten 3 oder einer gröſsern Zahl erhalten werden, und daſs überhaupt die Flächen mit den kleinsten Coefficienten am häufigsten vorkommen. So z. B. kommen in der gesammten Krystallreihe des rhomboëdrischen Kalkes, wie sie *Mohs* aufgestellt hat, bloſs die Coefficienten 1, 2, 3, 4 und 5, und unter diesen die kleinern viel häufiger als die gröſsern vor. Das hier Gesagte läſst sich übrigens leicht auf schiefe Axen anwenden und beweisen; bestimmt man statt der Lage der Ebenen die der auf schiefe Coordinaten Senkrechten, so erhält man sehr einfache Formeln, aus denen beinahe mit derselben

Kürze, wie die Formeln *Mohs's*, sich die Gleichungen der Winkel entwickeln lassen.

55) Am engsten hängt mit der Cohärenz die Theilbarkeit der Krystalle nach den verschiedenen Richtungen, oder, um sich genauer auszudrücken, jene Eigenschaft der Krystalle zusammen, vermöge welcher die Bruchflächen stets in bestimmten Ebenen liegen. Diese Theilungsrichtungen zu entdecken, hat wegen des Gebrauches zur Bestimmung der Mineralien und ihrer Krystallgestalt viele Krystallographen beschäftiget, allein den Grund der Theilbarkeit aufzufinden hat, die Meinungen der Atomistiker abgerechnet, noch beinahe Niemand versucht. Man könnte versucht werden, mit Rückblick auf die oben dargestellten Cohäsionsphänomene, die Theilungsebenen für die der kleinsten Cohäsion zu halten, weil in der Richtung dieser Ebenen der Krystall natürlich leichter theilbar seyn müfste, als in jeder andern; allein die Erfahrung widerlegt diesen Schlufs. Die Theilungsrichtungen sind zwar gröfstentheils denen der kleinsten Cohäsion parallel, allein sehr oft auch den Ebenen der gröfsten Härte, und in vielen Krystallen, und eben jenen, die am leichtesten spaltbar und zur Beobachtung der Theilungsrichtung die tauglichsten sind, wie beim Feldspath, Kalkspath, Baryt, sind die Theilungsrichtungen allen Flächen, die zu den ersten Gliedern der Reihe gehören, parallel, so dafs die Theilungsrichtungen mit gleichem Rechte den härtesten wie den weichsten Flächen entsprechen können.

56) Der Ursprung der Theilungsrichtungen liegt also anderswo. Um ihn aufzufinden, untersuchen wir, was bei der Theilung der Körper vorgehe. Zuerst wird ein Theil der Oberfläche zusammengedrückt, dieser Druck pflanzt sich durch den ganzen Körper fort, so dafs alle an einander gränzenden Theile, die zu derselben Zeit

zusammengedrückt oder ausgedehnt werden, eine Welle bilden. Diese von dem ersten Theilchen der Oberfläche ausgehenden Schwingungen verbinden sich bald mit denen, die von andern Theilen der Oberfläche reflectirt werden, sie werden minder regelmäfsig, und an mehreren Orten werden durch Zusammensetzung der Wellen der Druck und die Ausdehnung ein Maximum. Wenn die Grenze der Spannung an keinem Puncte von der Gröfse der Ausdehnung erreicht wird, so entsteht kein Bruch, und die Schwingungen gehen in jene über, die *Weber* mit dem Namen: stehende Schwingungen, bezeichnet hat. Bei einem starken Stofse aber werden manche Körpertheile so sehr ausgedehnt, dafs sie, falls sie streckbar sind, eine bleibende Veränderung erleiden, falls sie aber spröde sind, wie bei den meisten Krystallen, einen Bruch des ganzen Körpers an den Stellen der gröfsten Ausdehnung hervorbringen; woraus auch das wellenförmige Aussehen der meisten Bruchflächen sich leicht erklärt *).

57) Diese vielfach gekrümmte, muschelige Textur der Bruchtheile kann jedoch nur bei spröden Körpern von gleichförmiger Beschaffenheit, wie bei den Glasvarietäten oder deren Cohärenz nach allen Richtungen beinahe gleich stark ist, wie beim Quarz u. a., Statt finden; bei Körpern aber von ungleichförmiger Beschaf-

*) Die hier erwähnten Schwingungen unterscheiden sich von den *stehenden* Schwingungen, die *Chladni*, *Savart*, *Weber* an gläsernen oder hölzernen Platten und Stäben beobachtet haben, und die gröfste Ausdehnung scheint dann einzutreten, wenn die *fortpflanzende* Schwingung in die stehende übergeht. Bei den stehenden Schwingungen wird übrigens die Gröfse der Zusammendrückung und Ausdehnung durch Reibung, Trägheit, Widerstand des umgebenden Mittels etc. schnell verringert.

fenheit, die gleichsam aus Platten oder Fäden zusammengesetzt scheinen, kann diese Textur nicht beobachtet werden. Denn da hängt die Fortpflanzungsweise und Gestalt der Welle nicht blofs von dem Orte der Erregung, sondern auch von der Lage dieser Platten und Fäden ab, so dafs die Wellen, sie mögen an was immer für einem Orte erregt werden, immer eine Gestalt annehmen, die symmetrisch gegen die Richtung der Fäden liegt. So hat auch *Savart (Ann. de Chim. etc. 12.)* die Lage der Knotenlinien an Holzplatten viel mehr von der Richtung der Holzfasern, als wie es bei Körpern von gleichförmiger Structur der Fall ist, von dem Erregungsorte abhängig gefunden. Die Krystalle bestehen zwar nicht aus Platten und Fäden, allein bei den meisten von ihnen walten aus einem andern Grunde dieselben Verschiedenheiten in der Cohärenz ob, welche beim Holze aus der Richtung der Fasern entspringen; darum beachtet auch in ihnen die Welle bei ihrer Fortpflanzung dieselben Gesetze, und der Bruch entsteht am leichtesten und häufigsten in Richtungen, die gegen die Vertheilungsweise der Cohäsionskräfte die am meisten symmetrische Lage besitzen. Es hängt daher die Theilbarkeit von zwei Ursachen ab: von der Cohäsion und der symmetrischen Lage. In den Ebenen der kleinsten Cohäsion vereinigt sich beides, und darum sind die Theilungsrichtungen meistens ihnen parallel; allein diese können auch mit den Ebenen der gröfsten Härte, eben weil auch diese eine so symmetrische Lage gegen die Cohäsionskräfte besitzen, zusammenfallen, wie diefs so oft bei den auf die Axen des zwei- und zweigliedrigen Systems senkrechten Ebenen der Fall ist. In den minder symmetrischen Ebenen schiefer Prismen läfst sich die Spaltbarkeitsrichtung nur bei jenen Krystallen leicht beobachten, wo die kleinste Härte dem Prisma selbst

entspricht. Es sind demnach die Spaltungsebenen nicht immer hart, und man kann sich einzelne in der Richtung weicher Linien gemachte Beobachtungen, wie beim Cyanit (§. 18), leicht erklären. Die Theilungsrichtungen, von so grofsem Nutzen sie auch für die Kenntnifs der Cohäsionsunterschiede innerhalb desselben Körpers sind, dürfen daher für sich allein nie als entscheidend angesehen, und müssen stets mit directen Beobachtungen der Härte verknüpft werden, um entscheiden zu können, ob die Theilungsrichtung allein durch die symmetrische Lage, oder ob auch durch die Stärke der Cohäsion bestimmt worden sey *).

58) Um alle Wirkungen der Cohäsion zu berücksichtigen, sollten wir nun auch von der Fortpflanzung des Lichtes, der Electricität, der Wärme in den Krystallen sprechen, allein diefs würde den beschränkten Zweck dieser Abhandlung überschreiten, und es genüge, hier einige Bemerkungen über die ungleiche Einwirkung der Wärme auf die verschiedenen Krystallrichtungen anzuknüpfen.

Krystalle, die in verschiedenen Richtungen so verschiedene Eigenschaften zeigen, und sich beinahe wie verschiedene Körper verhalten, werden wahrscheinlich von demselben Wärmegrade in verschiedenen Richtungen verschieden ausgedehnt, woher auch die beobach-

*) Warum die Welle und die Bruchfläche oft ganz denselben Gang nehmen, und nicht im Geringsten von einander abweichen, ist wohl schwer zu erklären, jedoch nicht schwerer, als warum die Knotenlinien des Holzes den Fasern parallel sind, oder warum in einer Luftsäule oder einer Glasscheibe öfters derselbe Ton und dieselben Knotenlinien entstehen, wenn auch die Schwingung an einem andern Puncte erregt, oder andere Theile in Bewegung gesetzt werden.

tete Änderung der Winkel rührt. Zwischen Richtungen hingegen, deren Cohäsion gleich ist, waltet auch kein Unterschied in der Einwirkung der Wärme ob, wie wir an Gestalten des regulären Systemes und an den auf die Axen des vier- oder dreigliedrigen Systemes senkrechten Flächen bemerken. Wir wollen nun untersuchen, in welchem Verhältnisse die Wirkung der Wärme mit der Cohäsionskraft stehet. Im Allgemeinen weiſs man, daſs die Körper desto mehr ausgedehnt werden, je eine geringere Cohäsion sie besitzen; so dehnen sich Flüssigkeiten stärker aus als feste Körper; Eis, Phosphor etc. mehr als die Metalle; Zink, Blei, Zinn mehr als Eisen, Platin, Gold; und wenn auch andere Veranlassungen, z. B. das specifische Gewicht, die Wärmecapacität, das Atomengewicht einige scheinbare Ausnahmen erzeugen, so können wir doch behaupten, daſs unter verschiedenen, übrigens gleichen und bloſs in der Cohäsion abweichenden Körpern, die gröſste Ausdehnung der kleinsten Cohäsion entspreche. Und wenn anders die Ansicht richtig ist, daſs die Wärme die gegen die Cohäsion reagirende Kraft ist, so unterliegt es auch theoretisch keinem Zweifel, daſs die Wärme desto gröſsere Wirkungen hervorbringen werde, je geringer die Cohäsion ist.

59) Wenn sich dieſs also so verhält, so wird auch in den Krystallen, wo auſser der Cohäsion alles andere gleich ist, jene Dimension sich mehr ausdehnen müssen, welche die geringste Cohäsion besitzt, und eben in dieser Rücksicht ist die Beobachtung der Ausdehnungen der Krystalle durch die Wärme, wenn auch schwierig, doch von solchem Interesse, da durch dieselben das Verhältniſs der Wärme zur Cohäsion frei von allen fremdartigen Einflüssen ausgemittelt werden kann. Darum dehnt sich an dem schiefen Prisma des Gypses, in dem die Richtung der gröſsten Theilbarkeit die scharfe Kante

hinwegnimmt, die mit stärkerer Cohäsion begabte kürzere Diagonale weniger aus, als die längere, und das Prisma wird durch Wirkung der Wärme schiefer. So wird auch in dem Arragonit, wo die gleiche Spaltungsrichtung Statt findet, die Schiefe vergröſsert. Beim rhomboëdrischen Kalke, wo, wie wir gesehen haben, die Cohäsion in den der Axe parallelen Linien kleiner ist, als in den auf dieselbe senkrechten, dehnt sich der Krystall in der Richtung der Axe mehr aus, als in der darauf senkrechten, und das Rhomboëder nähert sich durch Wirkung der Wärme dem Hexaëder.

60) Alles dieſs geht aus der Theorie der Cohäsion hervor, und stimmt ganz mit jenen Beobachtungen überein, die *Mitscherlich* in seiner berühmten Abhandlung (Comm. der k. Berl. Academie, J. 1825, S. 201 ss.) bekannt gemacht hat. Es bleibt aber noch übrig, das Gesetz der Abhängigkeit zwischen der Gröſse der Ausdehnung der einzelnen Axen oder zwischen den Änderungen der Winkel und der Ausdehnung des ganzen Körpers zu finden. Da die Ausdehnung von der Cohäsion, diese von den verschiedenen Richtungen des Krystalls abhängt, so müssen die Änderungen aller Axen und Winkel durch dasselbe, allein von der Krystallgestalt bedingte, Gesetz ausdrückbar seyn, gesetzt auch, man kennte selbst die Gesetze des Wechsels der Cohäsion nicht. Dadurch wäre man in den Stand gesetzt, wenn α, β, γ die Winkel der krystallographisch gestellten Axen, $1:b:c$ die Verhältnisse der Gröſsen unter einander bezeichnen, aus der Beobachtung einer dieser fünf Gröſsen die übrigen vier zu berechnen. Allein ehe man an die Erfüllung dieser Hoffnung denken kann, müssen zuvörderst über diesen Gegenstand viel mehr Beobachtungen gemacht werden, und muſs die Art und Weise

der Auffindung und krystallographischen Stellung der Grundgestalt wissenschaftlich ausgemittelt seyn.

61) Unter den von *Mitscherlich* durchforschten Körpern gibt es sowohl isomorphe als dimorphe, und wenn es daher aufser allen Zweifel gesetzt wäre, dafs sowohl der rhomboëdrische als der prismatische kohlensaure Kalk aufser der ungleichen Vertheilung der Cohäsion und den daraus entspringenden Verschiedenheiten von vollkommen gleicher Beschaffenheit sind, so wäre die Erforschung der Wärmeeinwirkung auf diese gleiche und doch verschieden gebildete Materie von grofser Wichtigkeit; allein leider ist die absolute Ausdehnung des Arragonites noch unbekannt. Aber unter den isomorphen Körpern gibt es viele Verbindungen des kohlensauren Kalkes mit kohlensaurem Magnesium und Eisen, und bei allen diesen — mit einer einzigen wenig abweichenden Ausnahme — sind die Ausdehnungen desto gröfser, je gröfser die Neigung der Rhomboëderflächen ist.

Beim reinen kohlensauren Kalk beträgt die Neigung 105°, 4′, die Verringerung 8′, 34½″.

Bei 55 kohlens. Kalk + 45 kohlens. Magnesium beträgt die Neigung 106°, 15′, die Verringerung 4′, 6″.

Bei 60 kohlens. Eisen + 40 kohlens. Magnesium beträgt die Neigung 107°, 0′, die Verringerung 2′, 22″.

Die Schiefe wird also bei allen diesen Körpern durch die Wärme verringert und der Form des Hexaeders näher gebracht, allein die Unterschiede nehmen in einem noch gröfseren Verhältnisse zu, und wenn die Änderungen in demselben, oder wie es wahrscheinlich ist, in einem noch gröfsern Verhältnisse wachsen, so kann es geschehen, dafs diese Unterschiede beim Schmelzpuncte sich um mehrere Grade steigern. Bei der Erkaltung hingegen nimmt die Schiefe des kohlensauren

Kalkes stärker zu, als die der übrigen Krystalle, und bei einer gewissen Temperatur können die Axenwinkel aller dieser Gestalten einander beinahe ganz gleich, und so die isomorphen Krystalle zu wahrhaft homöomorphen werden. Diese Temperatur kann zwar, so lange das Gesetz der Abhängigkeit der Ausdehnung unausgemittelt ist, nicht bestimmt werden, allein höchst wahrscheinlich ist sie $= -\infty$, und die Gestalten der isomorphen Körper kommen der völligen Gleichheit, die sie zwar nie erreichen, immer näher und näher, so daſs alle Unterschiede in den Abmessungen dieser Gestalten bloſs von dem verschiedenen Einfluſs der Wärme herzurühren scheinen.

62) Über die Gestalt der bis ins Unendliche erkalteten Körper kann man die mannigfachsten Hypothesen wagen; allein wenigstens darf man bemerken, daſs wenn man annimmt, daſs die Gestalten der Körper bei einer unendlich geringen Temperatur einander gleich sind, die Gestalten jener unter ihnen, die eine geringe Ausdehnbarkeit besitzen, auch bei der gewöhnlichen wenig von einander abweichen müssen. So scheinen sich auch die kohlensauren Salze des Kalium, Eisen, Magnesium und anderer dergleichen Körper von ähnlicher chemischer Beschaffenheit und beinahe gleicher Gestalt zu verhalten. Die Gestalten jener Körper aber, die eine groſse Ausdehnbarkeit besitzen, wie z. B. Schwefel, Jod u. dgl. m., können zwar anfangs dieselbe Gestalt gehabt, jedoch durch die Einwirkung der Wärme die bei der gewöhnlichen Lufttemperatur obwaltenden Unterschiede erlangt haben. Es sind daher Krystalle desselben Systemes, deren Cohäsion und Theilbarkeit, wo nicht der Gröſse, doch ihren Verhältnissen nach einander gleich sind, und die durch den Einfluſs der Wärme bedeutende Änderungen erleiden, und zwar selbst dann als iso-

morph anzusehen, wenn ihre Winkel auch um mehrere Grade verschieden sind.

63) Wenn wir nun von der hypothetischen Ansicht wieder zur Erfahrung niedersteigen, so können wir, die Wahrheit des früher aufgestellten Verhältnisses zwischen der Cohäsion und der Ausdehnung vorausgesetzt, folgende Resultate als gefunden ansehen:

1. Die Krystalle werden in den Richtungen der kleinsten Cohäsion am meisten ausgedehnt, und wo die Richtung der gröſsten Theilbarkeit auf jene der geringsten Cohäsion senkrecht steht, werden die Dimensionen dieser Richtung vergröſsert.
2. Wo zwei Theilungsflächen von gleicher Gestalt unter einem schiefen Winkel gegen einander geneigt sind, wird die Schiefe durch die Wärme verringert (wie beim Baryt).
3. Wo diese Theilungsebenen sowohl von ungleicher Gestalt als zugleich schiefwinkelig sind, wird die Schiefe des Winkels verringert, der Unterschied der Dimensionen vergröſsert (Cyanit, Gyps).
4. Körper mit Theilungsflächen in der Lage eines Rhomboëders, möge nun dieses ein stumpfes oder spitzes seyn, nähern sich einem Hexaëder.
5. Körper mit Theilungsflächen in der Richtung einer vierseitigen Pyramide nähern sich dem Octaëder.

An verwickelteren Gestalten kann die relative Änderung der einzelnen Dimensionen leicht aus dem, früher über die Cohäsion Gesagten, ausgemittelt werden.

64) Diese Erscheinungen sind leicht zu entdecken; hat man sie aber einmal ins Klare gesetzt, so wird diese Änderung der Winkel das beste Mittel darreichen, die Cohäsion zu bestimmen. Zwar auch die Härte ist leicht auszumitteln; allein unmöglich hält es, jemals auf dem Wege der Beobachtung, sey es nun der Härte, der Co-

häsion oder der Elasticität, die Verhältnisse, die zwischen den Cohäsionskräften in den verschiedenen Richtungen des Krystalls obwalten, kennen zu lernen. Jedoch auf dem Wege der Berechnung der durch die Wärme bewirkten Formänderungen des Krystalls kann und wird es auch gelingen, die mit der Wärme in so engem Zusammenhange stehende Cohäsion dem Calcul zu unterwerfen. Das hier Angedeutete bleibt übrigens künftigen Untersuchungen vorbehalten *).

---

*) Der Übersetzer hat an einigen Stellen die Sprache des Originals, das sich fast ausschliefsend der *Weifs*'schen kryst. Terminologie bedient, in die *Mohs*'sche oder jene übersetzt, wie man sie in der Optik zu brauchen pflegt. Daher kommt es, dafs man auf S. 99, Z. 3 zweiaxig statt zwei- und zweigliedrig; S. 99, Z. 12 v. u. einaxig statt ein- und eingliedrig; S. 100, Z. 5 v. u. doppelaxig statt zwei- und zweigliedrig; S. 200, Z. 16 Tessularsystem statt reguläres System; S. 102, Z. 1 und 2 drei- oder sechsaxig statt drei- und sechsgliedrig; ferner S. 200, Z. 11 octaëdrisches Flufshaloid statt Flufsspath findet. Endlich mufs als sinnstörender Verstofs angemerkt werden, dafs es S. 106, Z. 1 statt *Gefüge*, *Ausbildung* heissen mufs, und S. 101, Z. 22 ist nach dem Worte Kanten einzuschalten: so ist es auch, und der Unterschied der Härte in beiden Richtungen ist sogar hier noch gröfser, als beim Kochsalz.

VII.

Über die chemische Theorie der einfachen und zusammengesetzten Electromotoren;

von

S t. M a r i a n i n i.

(Vom Herrn Verfasser in italien. Sprache eingesandt, und aus derselben frei übersetzt. *)

Seit Langem sucht *La Rive* darzuthun (vergl. dessen Abhandl. in der Zeitschr. für Phys. u. Mathem., Bd. VI., S. 103), daſs die electrischen Erscheinungen des *Volta'*schen Apparates nicht durch die Berührung der heterogenen Körper, sondern durch die chemische Einwirkung der Flüssigkeiten auf die Metalle veranlaſst werden, und zwar sowohl in dem Falle, wo die zwei ein Element bildenden Metalle in derselben, als auch, wenn sie in zwei verschiedenen Flüssigkeiten stehen. Gegen ihn tritt nun *Marianini* auf.

Ohne aber die Theorie *Volta's* als die allein genügende aufzustellen, weist er bloſs nach, daſs wenigstens die *electrochemische* Ansicht nicht hinreiche, die verschiedenartigen, sowohl in dem einen als dem andern der von *La Rive* unterschiedenen Fälle, sich ergebenden Phänomene zu erklären. Seine Abhandlung zerfällt in drei Abtheilungen, deren erste den Fall einele-

---

*) Die eingesandte Abhandlung führt den Titel: *Memoria sopra la theoria chimica degli elettromotori voltiani semplici e composti.* Ihr erster Theil: *di alcune circostanze che alterano la facoltà elettromotrice relativa de' metalli*, kam der Redaction eher in einer französischen Übersetzung zu Gesicht, als das Original, und wurde bereits im vorhergehenden Hefte dieser Zeitschrift im Auszuge mitgetheilt. D. R.

mentiger Electromotoren in derselben, die zweite den einelementiger Electromotoren in verschiedenen Flüssigkeiten, und deren dritte zusammengesetzte Electromotoren voraussetzt.

I.

1. Die *erste* Thatsache, die *La Rive* für sich anführt, ist: daſs die Wirkung der chemischen Kräfte an und für sich Electricität entwickle, und bei den Electromotoren jeder Art *stets* chemisch verschiedene Stoffe vorhanden seyen. Allein eben so unwiderstreitbar ist es auch, daſs verschiedenartige Körper bei ihrer Berührung, auch ohne chemisch auf einander zu wirken, Electricität erzeugen, daſs bei der *Volta*'schen Säule stets solche heterogene Körper mit einander in Berührung kommen, und eben so wenig läſst sich läugnen, daſs eine Temperaturänderung an und für sich einen electrischen Strom hervorrufe, und daſs wirklich bei den Electromotoren stets irgend eine Temperaturänderung eintrete.

Die Thatsachen sprechen also gleich stark für jede der drei Theorien: für die Contactelectricität, für die electrochemische Ansicht, und für jene, die alle Erscheinungen bloſs aus den Änderungen des Gleichgewichtes der Wärme erklären will; sie können also keiner den Vorzug zuerkennen machen.

Etwas anderes wäre es, wenn man beweisen könnte, daſs die Berührung, die Reibung, die Ungleichheiten der Temperatur und alle andern Mittel, die man bis jetzt zur Electrisirung der Körper angewendet hat, chemische Veränderungen im Innern derselben hervorbringen, dann müſste man der chemischen Erklärungsweise beinahe unbedingt den Vorzug einräumen; allein, den gedachten Beweis hat noch Niemand geführt.

2. Die *zweite* zur Unterstützung der electrochemi-

schen Hypothese angeführte Thatsache ist: daſs zwei Stücke *eines und desselben* Metalls in eine Flüssigkeit getaucht, die sie anzugreifen vermag, einen starken electrischen Strom erzeugen.

Allein es sind hier nur zwei Fälle möglich: entweder sind diese beiden Metallstücke wirklich vollkommen homogen, oder es waltet zwischen ihnen irgend eine Verschiedenheit ob. Im letztern Falle kann die Entstehung des Stromes mit gleichem Rechte, wie aus der electrochemischen, auch aus der *Volta*'schen Hypothese erkläret werden. Im erstern Fall, der übrigens der unwahrscheinlichere ist, da *Volta* in seinen zahlreichen Versuchen nachgewiesen hat, daſs schon die allerkleinste Verschiedenheit zweier Stoffe hinreiche, einen electrischen Strom zu erzeugen, gewährt die electrochemische Ansicht nicht bloſs keine hinreichende Erklärung des Factums, sondern dasselbe steht mit dem Grundsatze, den man aufstellen will, nämlich daſs die Flüssigkeit, im Falle ein electrischer Strom eintreten soll, nicht auf die beiden Elemente eines *Volta*'schen Plattenpaares gleich stark einwirken darf, in offenem Widerspruch. Denn wie kann man annehmen, daſs dieselbe Flüssigkeit auf zwei gleich polirte und in Allem identische Streifen desselben Metalls ungleich einwirke?

3. Wir gehen nun weiter zu einigen directen Versuchen, die nach *La Rive* die Wahrheit seiner Theorie darthun sollen: Ein Plattenpaar aus Kupfer und Zinn in einer Säure oder Salzlösung erzeugt einen Strom in der Richtung vom Kupfer zum Zink, hingegen in eine Ammoniaklösung getaucht, einen Strom in der Richtung vom Zinn zum Kupfer, oder mit andern Worten, im ersten Falle ist Kupfer — und Zinn +, und im zweiten Falle Kupfer + und Zinn —. Dieſs, meint *La Rive*, könne nur davon herrühren, daſs die Salz- oder Säure-

lösung Zinn stärker als Kupfer, hingegen die Ammoniaklösung Kupfer stärker als Zinn angreift.

Beide Facta sind wahr, allein ob auch der von *La Rive* vermuthete Zusammenhang, ist eine andere Frage. Der von dem gewöhnlichen abweichende electrische Zustand des Kupfers und Zinns kann auch in den Änderungen seinen Grund haben, welche diese Flüssigkeit auf die relative electromotorische Kraft jener Metalle ausübt, und wirklich zeigen directe Versuche, daſs die electromotorische Kraft des Kupfers im Ammoniak sich schwäche, hingegen die des Zinns sich verstärke, und es darf uns daher nicht befremden, daſs das Zinn negative, und das Kupfer positive Electricität zeigt.

Man hat ferner gefunden, daſs die berührten Änderungen der electromotorischen Kraft nicht augenblicklich eintreten, sondern einer gewissen Zeit bedürfen, um bemerkbar zu werden. Bei der ersten Eintauchung des Plattenpaares in Ammoniak wird daher das Kupfer, wie gewöhnlich, $-E$, und das Zinn $+E$ zeigen, und nur erst wenn die Metalle längere Zeit in der Flüssigkeit bleiben, wird die bemerkte Abweichung vor diesem electrischen Verhalten eintreten; lauter Bemerkungen, die durch die Beobachtungen bestätiget werden.

Auch verdient dieſs Berücksichtigung, daſs, obgleich Zinn vom Ammoniak weniger angegriffen wird oder werden soll als Kupfer, doch die Steigerung seiner electromotorischen Kraft in dieser Flüssigkeit weit beträchtlicher ist, als die Schwächung der Kraft, die Kupfer in dieser Flüssigkeit erleidet. Denn experimentirt man mit zwei Zinnstreifen, und taucht sie, einen nach dem andern, in Ammoniak, so erhält man viel bedeutendere Abweichungen, als wenn man auf gleiche Weise Kupferstreifen von gleichen Dimensionen wie die Zinnstreifen anwendet. Ja dieser Unterschied ist so groſs, daſs wenn

man während 4′ — 5′ den Zinnstreifen in Ammoniak hält, und hierauf den Kupferstreifen hineintaucht, dieser sich alsogleich positiv, und der erstere negativ zeigt, obgleich das Ammoniak noch nicht Zeit haben konnte, merkbar auf das Kupfer einzuwirken. Wenn man hingegen erst die Kupferplatte, und zwar nicht nur durch 4′ — 5′, sondern auch durch 10 und mehr Minuten in die Ammoniaklösung hält, und später erst die Zinkstreifen hineintaucht, so bemerkt man wohl eine geringere Abweichung der Nadel, als wenn man beide Streifen zu gleicher Zeit in die Flüssigkeit taucht, allein das Kupfer zeigt noch immer — *E* und das Zink + *E*.

Daſs nicht die verschiedene Stärke der chemischen Einwirkung, sondern lediglich die Änderung der electromotorischen Kraft der Metalle jenes entgegengesetzte Verhalten des Elementes im Ammoniak hervorbringe, dafür zeugt auch, daſs wenn man die beiden Platten auch nur zwei Minuten lang im Ammoniak läſst und dann erst in eine Säure- oder Salzlösung taucht, das Kupfer stets + *E* und das Zinn — *E* zeigt.

Bei einem aus Eisen und Kupfer gebildeten Elemente hat *La Rive* ähnliche Erscheinungen wie bei dem aus Kupfer und Zink gebildeten entdeckt, *Marianini* hat aber auch an ihm seine Ansichten bestätiget gefunden. Nur tritt die Änderung der Electricität viel schneller ein, als bei dem Kupfer-Zinnelemente, und es reichen hiezu gewöhnlich 2″ — 3″ hin, was daher kommt, daſs Eisen in der *Volta*'schen Reihe näher an Kupfer liegt, als Zinn, oder daſs jene die electromotorische Kraft steigernde Einwirkung des Ammoniaks sich auf Eisen stärker äussert, oder endlich daſs beide diese Umstände zusammen wirken.

4. Ein zweites, dem erst angeführten analoges Phänomen, das *La Rive* ebenfalls zur Stütze seiner Meinung

anführt, ist folgendes: Reines Gold und Platina in vollkommen reine Salpetersäure getaucht, setzen die Nadel des Multiplicators gar nicht in Bewegung, aber auch nur ein einziger Tropfen Salzsäure in die Flüssigkeit gegossen, und eine geringe chemische Wirkung auf Gold hervorgebracht, bringt einen sehr bedeutenden Strom hervor. Zieht man nun, meint *La Rive*, aus diesem Versuche Folgerungen — als bewiesen vorausgesetzt, daſs die Leitungsfähigkeit der Flüssigkeit durch den Tropfen Salzsäure nicht vergröſsert worden ist — so sieht man, daſs bloſs der Statt findenden electrischen Einwirkung der Eintritt des electrischen Stromes zuzuschreiben sey, der vorher nicht bemerkt werden konnte, obgleich die nach der Ansicht der Berührungstheorie günstigsten Umstände zu seinem Entstehen vorhanden waren, die Berührung zweier sehr heterogenen Metalle, wie Gold und Platin, und die am besten leitende Flüssigkeit, die Salpetersäure.

Vor Allem ist in Erinnerung zu bringen, daſs nach der *Volta*'schen Ansicht nicht immer die Verschiedenheit der materiellen Beschaffenheit der Metalle es ist, von welcher die Stärke des electrischen Stromes abhängt, sondern allein die Gröſse der Verschiedenheit der electrischen Zustände, in welche sie bei der wechselseitigen Berührung gerathen. So z. B. erregen nach *Humboldt* zwei Zinkstücke von ungleicher Politur bei ihrer wechselseitigen Berührung einen stärkern electrischen Strom, als Gold und Silber.

Was nun das oben dargestellte Phänomen betrifft, so ist es wahr, daſs seine Erklärung nach der electrochemischen Ansicht allen Anforderungen genüge, allein eben so genügend ist es auch aus den schon oft erwähnten Änderungen zu erklären, welche die Flüssigkeiten in der relativen electromotorischen Kraft der Metalle

hervorbringen; und was noch mehr sagen will, eben bei den beiden Metallen, Gold und Platin, zeigen sich, ausser den von *La Rive* erwähnten, mehrere andere Erscheinungen, die zwar wohl aus der Annahme solcher Änderungen sich begreifen lassen, aber nach der electrochemischen Ansicht gänzlich unerklärbar scheinen. Ich führe einige dergleichen Versuche an.

Zwei Platten reinen Goldes gleichzeitig in Salpetersäure, gemischt mit einigen Tropfen Salzsäure, getaucht, brachten gar keine Bewegung am Multiplicator hervor. Wurden die Platten nafs gemacht, getrocknet *), und dann noch ein Mal in dieselbe Säure getaucht, so zeigte sich wiederum keine Wirkung; wurde aber die eine Platte nach der andern eingetaucht, so zeigte sich eine merkliche Abweichung der Nadel von Seite der Platte, die zuerst hineingebracht worden war, d. h. sie zeigte negative Electricität. Je länger der Zwischenraum zwischen den beiden Eintauchungen war, desto gröfser war die Abweichung, in ungefähr 2′ erreichte sie ihr Maximum von ungefähr 8°. Jedoch war die Steigerung der Wirkung in den ersten Momenten bedeutender, wie in den spätern. Die Platten waren rechtwinkelig, 7 Millimeter breit, und ungefähr 2 ½ Centimeter tief in die Flüssigkeit getaucht.

An zwei Platinplatten zeigten sich ähnliche Wirkungen, auch bei diesen erschien die zuerst eingetauchte Platte negativ-electrisch; nur waren die unter gleichen Umständen eintretenden Abweichungen gröfser, als bei den Goldplatten, und das Maximum trat in kürzerer Zeit ein. Die Wirkung des Königswasser auf Gold und Pla-

*) Wo nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, ist immer zu verstehen, dafs die Platte oder die Platten bei jedem einzelnen Versuche nafs gemacht und getrocknet wurden.

tin besteht also darin, dafs es die relative electromotorische Kraft derselben erhöht, und zwar in einem höhern Grade beim Platin als beim Golde.

Diese Erscheinungen können durchaus nicht in der Electricität ihren Grund haben, die sich etwa unmittelbar durch die chemische Einwirkung der Säure auf die Metalle entwickeln soll. Denn erstlich, wenn man auch die eingetauchte Platte einige Zeit der Luft aussetzt, und dann zugleich mit der andern abermals in die Flüssigkeit taucht, verhält sie sich dennoch negativ gegen die andere. Zweitens bleibt die eingetauchte Platte, auch wenn sie trocken geworden, Tage, Monate, ja vielleicht sogar Jahre lang electro-negativ gegen jene Platte, die nicht in die Flüssigkeit getaucht worden war. Drittens erfolgen alle diese Erscheinungen gleichmäfsig, es möge während der ganzen Zeit des Versuches die Communication mit dem Meere hergestellt seyn oder nicht.

Aber vielleicht ist die später in die Flüssigkeit gebrachte Platte die weniger angegriffene? — Ich glaube, nein! Denn bringt man die benetzte und die trockene Platte auch in eine andere Flüssigkeit, so bleibt die Richtung des Stromes doch dieselbe, und selbst wenn diese Flüssigkeit 20—30fach verdünnte Salpetersäure ist, die doch nach unseren gegenwärtigen Kentnissen in der Chemie weder Gold noch Platin angreift, zeigt sich in der angezeigten Richtung eine Abweichung, die drei Mal so stark ist, als die, welche man in derselben concentrirten Säure bemerkt.

Wie wird man sich daher nach dem Vorhergegangenen die Entstehung des beim Eintauchen von Platin und Gold in Königswasser eintretenden Stromes zu erklären haben? Wohl nicht anders, als dafs in beiden durch Wirkung der Säure die relative electromotorische Kraft erhöhet worden, jedoch da diese Erhöhung, wie

wir sahen, in einem stärkern Grade beim Platin als beim Golde Statt findet, nimmt dieses positive, jenes negative Electricität an. Dieſs ist so wahr, daſs wenn man zuerst die Platin- und später die Goldplatte in die Flüssigkeit bringt, die Abweichung wächst, hingegen im umgekehrten Falle, wo zuerst die Gold- und später die Platinplatte eingetaucht wird, merklich kleiner wird. Ja wenn das Gold um etwas mehr als 1 $^1/_2{}'$ früher als das Platin in die Flüssigkeit kommt, so zeigt es — *E*, und das Platin im Gegentheile + *E*.

Wir haben bis jetzt nur von der zweiten Hälfte des *La Rive*'schen Versuches gesprochen, was die erste Hälfte betrifft, nämlich den Mangel an Wirkung beim Eintauchen eines Gold-Platin-Elementes in reine Salpetersäure, so bestreitet *Marianini* deren Richtigkeit, und führt an, daſs er im Gegentheile alle jene Versuche, die er mit Gold- und Platinplatten in Königswasser angestellt hat, in reiner Salpetersäure wiederholt, und, die Intensität ausgenommen, indem in ersterer eine Abweichung von selbst 10° — 12°, in letzterer hingegen von kaum 2° — 3° hervorgebracht wurde, vollkommen gleiche Resultate erhalten habe.

Man könnte die Reinheit der Säure oder der Metalle bezweifeln. — Allein die erstere wurde von Hrn. *Bizio*, einem äuſserst verdienstvollen Chemiker, bereitet, und die letztern von Hrn. *Bussolin* gereinigt, der ohnehin wegen seiner Geschicklichkeit in metallurgischen und besonders in docimastischen Arbeiten rühmlichst bekannt ist. Auch der Zweifel könnte sich erheben, ob nicht die Salpetersäure aus der atmosphärischen Luft, die besonders in Venedig immer mit Salzsäure geschwängert ist, dieselbe an sich gezogen, und daher als Königswasser gewirket habe; jedoch zur Entfernung dieses Verdachtes lieſs *Marianini* mit Fleiſs das Glas mit Salpetersäure,

die zu den obigen Versuchen gedient hatte, durch mehrere Tage in der freien Luft stehen, und wiederholte dann die Versuche. Allein geschweige daſs sich eine Steigerung der Wirkung gezeigt hätte, so trug dieser Umstand im Gegentheile zur Verminderung derselben bei, und nach ungefähr 40 Tagen brachte die Flüssigkeit auf Gold und Platin gerade die entgegengesetzte Wirkung wie früher hervor, d. h. sie verminderte die relative electromotorische Kraft dieser Metalle, statt sie zu vermehren.

Das Gesagte beweist hinlänglich, daſs die von *Marianini* bemerkten Wirkungen nicht Verunreinigungen der angewendeten Stoffe zuzuschreiben sind, und daſs folglich das von *La Rive* erwähnte Ausbleiben aller Wirkung vielleicht davon komme, daſs seine Salpetersäure bei ihrem Gebrauch bereits eine groſse Menge Wasser absorbirt hatte, oder daſs dessen Multiplicator weniger empfindlich war, als der *Marianini's*. Allein was nun auch die Ursache dieser Abweichung in den Resultaten *La Rive's* und *Marianini's* ist, so viel bleibt gewiſs, daſs die electro-chemische Theorie die früher aus einander gesetzten Erscheinungen nicht herzuleiten vermag.

Vielleicht macht eines Tages ein geschickter Chemiker die gedachten Veränderungen, welche Säuren auf Gold und Platin hervorbringen, zum Gegenstande seiner Forschungen; denn für jetzt bleibt es ein Curiosum, warum Platin in einer Säure, die Gold stärker angreift, dennoch eine gröſsere Veränderung des Zustandes der Oberfläche erleidet, als letzteres, warum ähnliche Erscheinungen selbst in Säuren eintreten, von denen weder Platin noch Gold angegriffen wird, und endlich warum diese Säuren nur eine geringe Verdünnung zu erfahren brauchen, um dann auf die erwähnten Metalle eine entgegengesetzte Wirkung auszuüben. — Doch

gehen wir wieder auf die electrochemische Theorie zurück.

5. Eine Thatsache, sagt *La Rive*, die aufser Zweifel setzt, dafs es lediglich die chemische Wirkung sey, die an dem weniger löslichen Metalle den positiv-electrischen Zustand hervorruft, ist folgende: Bringt man Eisen und Blei in concentrirte Salpetersäure, so zeigt sich das Eisen im ersten Momente negativ, weil noch keine chemische Wirkung Statt findet, allein sobald die energische chemische Einwirkung beginnt, oder wenn man das in die Säure getauchte Stück des Eisens einen Augenblick der Luft aussetzt, was den Eintritt der chemischen Wirkung hervorruft, so wird dasselbe vorher negative Eisen in derselben Flüssigkeit positiv, und zwar mit einer beträchtlichen Intensität.

Diese Thatsache würde freilich viel beweisen, wenn man nur vorerst begreiflich gemacht hätte, warum im ersten Momente der Eintauchung die Wirkung, die $= 0$ auf Eisen, nicht auch $= 0$ auf Blei ist, das doch überdiefs in den nächsten Momenten eine viel geringere Wirkung erleidet. Einfacher stellt sich die Sache dar, wenn man den Wechsel der Electricität aus den Veränderungen der relativen electromotorischen Kraft der Metalle durch Einwirkung der Säure herleitet, und für diese Meinung sprechen auch folgende Thatsachen:

a) Nimmt man zwei polirte Eisenplatten, verbindet sie mittelst des Multiplicatordrahtes, und taucht eine *nach* der andern in concentrirte Salpetersäure, so zeigt die Abweichung der Nadel, dafs die früher eingetauchte Platte $+E$, die spätere $-E$ besitzt. Je gröfser der Zwischenraum zwischen der Eintauchung der ersten und jener der zweiten Platte, desto stärker ist die Abweichung, in einigen Minuten hat sie völlig oder beinahe ihr Maximum erreicht.

Dieser Versuch zeigt, daſs die Säure das Eisen electro-negativer macht, als es in seinem natürlichen Zustande ist.

b) Zwei Bleiplatten zeigen ähnliche Erscheinungen, nur in einem viel stärkern Grade, folglich wird durch Salpetersäure auch die electromotorische Kraft des Bleies, und zwar in einem noch höheren Grade als die des Eisens erhöhet. Taucht man folglich, wie in dem Versuche *La Rive's*, eine Eisen- und eine Bleiplatte gleichzeitig in die Flüssigkeit, und läſst sie einige Zeit in derselben, so erhält Blei $-E$ und Eisen $+E$, eben weil die electromotorische Kraft des Bleies dergestalt vermehrt wird, daſs sie die des Eisens bei weitem übertrifft, ungeachtet auch die letztere gesteigert worden ist.

c) Aus demselben Grunde erhält man, wenn man zuerst die Blei- und hierauf die Eisenplatte in die Säure bringt, *augenblicklich* $+E$ im Eisen und $-E$ im Blei, und man kann nun beide noch so lange Zeit in der Flüssigkeit lassen, die Intensität des Stromes wächst nicht, und die Schwingungen der Nadel erreichen nicht wieder die Gröſse des Ausschlages der ersten Momente. Darum, wenn *La Rive* das Eisen einen Augenblick der Luft aussetzt, ist es nicht die gesteigerte chemische Wirkung, die macht, daſs es beim abermaligen Eintauchen in die Flüssigkeit sich gegen das Blei positiv-electrisch verhält, sondern der Grund liegt darin, daſs während man das Eisen in die Luft hält, die Flüssigkeit in dem eingetaucht bleibenden Blei jene die electromotorische Kraft steigernde Veränderung hervorbringt, und wirklich

d) bringt man, während man das Eisen der Luft aussetzt, auch das Blei aus der Flüssigkeit, trocknet und polirt es, und taucht beide Platten gleichzeitig wieder in die Flüssigkeit, so zeigt das Eisen $-E$, das Blei $+E$, und zwar in einem stärkeren Grade als beim er-

sten Momente der früheren Eintauchung. Soll also hier, angenommen, daſs wirklich die Aussetzung des befeuchteten Eisens an die Luft die chemische Verwandtschaft steigert, diese gesteigerte Kraft das Eisen ein Mal, statt es positiver zu machen, vielmehr negativer als früher machen, und das andere Mal (wo man das Blei in der Flüssigkeit lieſs) wirklich einen negativ-electrischen Zustand im Eisen hervorzurufen im Stande seyn? Befremdend zum wenigsten wäre es.

Wenn man auf dieselbe Weise die andern von *La Rive* angeführten, den obigen analogen Versuche erwägt, so gelangt man auf gleiche Resultate. Es scheint daher nicht *für* die electrochemische Theorie zu sprechen, daſs verschiedene Metalle ein verschiedenes electrisches Verhalten gegen einander äuſsern, je nachdem man sie längere Zeit in concentrirter oder in verdünnter Salpetersäure stehen läſst, während andererseits sie in beiden Flüssigkeiten im ersten Momente ihrer Eintauchung, wo die Einwirkung der Flüssigkeiten noch nicht den Zustand ihrer Oberflächen dergestalt modificiren konnte, daſs eine Änderung der relativen electromotorischen Kraft entstanden wäre, genau dasselbe Verhalten zeigen *).

*) Hieraus widerlegt sich der Einwurf, der *Marianini* von *La Rive* gemacht worden ist, daſs auch angenommen, die Richtung des Stromes in einem *Volta*'schen Elemente hänge nur von der relativen Beschaffenheit der beiden Metalle ab, doch *Marianini's* Folgerungen aus diesem Principe sich nicht bewahrheiten lassen. So führt *La Rive* zum Belege die in *Marianini's* Abhandlung enthaltene Tafel der electromotorischen Reihenfolge der Körper an, mit dem Beisatze, daſs der jedem einzelnen Körper angewiesene Platz nur dann der rechte sey, wenn man dieselbe leitende Flüssigkeit, wie *Marianini*, anwendet. Eben so, meint er, beruhe die Tafel der Leitfä-

II.

6. **Das bisher Vorgetragene scheint nun dargethan zu haben, daſs die electrochemische Theorie unzurei-**

---

higkeit der Flüssigkeiten auf dem Principe, daſs jene Flüssigkeit am besten leite, bei welcher der stärkste Strom Statt findet; allein man braucht bloſs das hinein getauchte *Volta*'sche Element, oder nur eines der Metalle, aus denen letzteres besteht, zu ändern, und alsogleich ist die Reihe der Flüssigkeiten eine ganz andere.

Dagegen läſst sich nun erwiedern: *a)* daſs *Marianini's* Tafel der metallinischen Electromotoren, *einige Zusätze ausgenommen*, ganz identisch ist mit der von *Volta* ohne Anwendung von Flüssigkeiten angegebenen und von andern Physikern bestätigten; *b)* daſs *Marianini* bei Construction dieser Tafel nicht eine, sondern mehrere Flüssigkeiten angewendet habe; *c)* daſs diese Flüssigkeiten weder in concentrirten Säuren, noch in starken Salz- oder alkalinischen Auflösungen bestanden, und nichts desto weniger *ausdrücklich* bloſs auf die Wirkung des ersten Momentes der Eintauchung des Plattenpaares in die Flüssigkeit gesehen wurde, eben weil *Marianini's* Absicht war, eine Tafel der Electromotoren in ihrem natürlichen Zustande und nicht in dem durch die umgebende Flüssigkeit oder durch andere, in der berührten Abhandlung vielfach besprochene, Umstände veränderten Zustande zu geben.

Was den Angriff *La Rive's* gegen die Tafel der Leitfähigkeit betrifft, so möge er die Bemerkung *Marianini's* nachlesen, wo dieser denselben Einwurf sich selber macht, und noch hinzusetzt, daſs eben wegen dieser Veränderlichkeit der Leitfähigkeit er seine Versuche auf eine geringe Anzahl Leiter beschränkt habe, und wo er auch eine Methode zur Vermeidung solcher Anomalien vorschlägt.

Übrigens mögen immerhin *Marianini's* Tafeln noch einige Unvollkommenheiten enthalten, er verspricht bei Wiederaufnahme seiner Arbeiten sie zu verbessern; al-

chend zur Erklärung der Phänomene bei einfachen *Volta*'schen Elementen in einer und derselben Flüssigkeit sey; gehen wir nun über zu dem Falle, wo die zwei Platten des Elementes in verschiedenen Flüssigkeiten stehen. Wir werden da allem Anscheine nach mehr Widersprüche mit der electrochemischen Ansicht finden; denn stehen beide Platten in einer und derselben Flüssigkeit, so ist — *La Rive* bemerkt es selbst — das durch die Flüssigkeit am stärksten angegriffene Metall gewöhnlich auch das positivere, und folglich gehet bei der Erklärung der Phänomene die Ansicht des gelehrten Genfers mit der *Volta's* Hand in Hand, und was letztere betrifft, so hat sie noch wenig Widersprüche in ihrem Wege gefunden. Allein wenn die Platten in verschiedenen Flüssigkeiten stehen, dann — wir werden es gleich sehen — häufen sich die Widersprüche und die unerklärbaren Facten zusehends, und es hängt blofs vom Experimentator ab, ein so grofses Heer hievon aufzustellen, als ihm beliebt.

Marianini füllte ein Glas mit schwacher Schwefelsäure, ein anderes mit destillirtem Wasser, und setzte die Flüssigkeiten mittelst einer heberförmigen Röhre voll reinem destillirten Wasser in Verbindung. In die Säure brachte er eine Eisenplatte, die mit dem einen Ende des Multiplicators in Verbindung stand, während an dem andern eine wohl polirte Zinkplatte befestiget war, die in das destillirte Wasser hineintauchte. Die Abweichung der Nadel zeigt beim Zinke $+E$, und doch wird *unstreitbar* Zink ungleich weniger von destillirtem Wasser, als Eisen von Schwefelsäure angegriffen. *Marianini* brachte statt der Eisenplatte eine Blei-, eine Messing-, eine Kupferplatte an, die Erscheinung blieb die-

---

lein das darf man doch nicht sagen, dafs sie in ihrem Principe falsch sind!

selbe; er vertauschte die Zinkplatte mit einer Bleiplatte, auch diese zeigte sich im Vergleich mit Eisen, Messing, Kupfer positiv.

Der Schwefelsäure ward Salpetersäure substituirt, und mittelst eines Platindrahtes mit dem reinen Wasser in Verbindung gesetzt, ein dicker Silberdraht in die Säure, eine Kupferplatte ins Wasser getaucht, und beide mittelst des Multiplicators verbunden. Die Nadel zeigte, daſs sich das Kupfer, und nicht das Silber positiv electrisirte. *Marianini* brachte statt des Kupfers andere Metalle aus der Reihe derjenigen an, die sich nach *Volta* positiv gegen Silber verhalten, wie Eisen, Blei, Zink, und bei allen zeigte das Silber —*E*. Und *doch* ist die Wirkung der Salpetersäure auf Silber sehr stark, die des Wassers auf Kupfer äuſserst schwach.

Vielleicht wird man uns nun glauben, daſs nicht die chemische Einwirkung die Ursache der *Volta*'schen Ströme ist, allein wir wollen die Thatsachen anführen, die beweisen, daſs sie nicht einmal den geringsten directen Einfluſs auf dieselben hat.

Man gebe in ein Glas mit 6 Theilen Wasser verdünnte Schwefelsäure, in ein anderes destillirtes Wasser, und stelle die Communication zwischen beiden Gläsern durch einen mit destillirtem Wasser getränkten Papierstreifen her, eine Zink- und eine Platinplatte werden mittelst des Multiplicatordrahtes verbunden, das Zink in die Säure, das Platin ins Wasser getaucht. Die Declination der Nadel beträgt 11°. Man trockne nun die Platten und wiederhole den Versuch, sobald die Nadel zur Ruhe gekommen ist, aber tauche jetzt das Platin in die Säure und das Zink ins Wasser. Die Abweichung beträgt wiederum 11°. Und doch findet beim Eintauchen des Zinks in die Säure ein heftiges Aufbrausen, eine bedeutende chemische Wirkung Statt, während beim

Eintauchen des Platins in die Säure sich nicht die geringste Spur einer solchen Wirkung zeigt.

Wendet man statt der Schwefel-, Salpetersäure, statt Platin und Zink, Silber und Zink an, so zeigt sich jedes Mal eine Abweichung von 6°, ob nun das Zink in die Säure oder ins Wasser getaucht wurde. Plattenpaare aus Stahl und Zink, Kupfer und Zink, Eisen und Zink gaben ganz analoge Resultate *).

7. Konnten diese der electrochemischen Theorie so widersprechenden Erscheinungen, wird man fragen, dem Scharfblick *La Rive's* entgehen? Keineswegs. *La Rive* selber bemerkt, dafs wenn man in den einen Arm einer Uförmig gekrümmten Röhre Salpeter-, und in den andern Arm concentrirte Schwefelsäure gibt, und das Zinkende des Multiplicators in die Schwefel-, das Kupferende in die Salpetersäure gibt, das Zink sich positiv gegen das Kupfer verhält, obgleich letzteres stärker durch die Salpetersäure, als ersteres durch die Schwefelsäure angegriffen wird. »Allein,« argumentirt nun *La Rive*, »auch mit ganz gleichartigen Kupfer-, Zink-, Bleiplat-»ten u. s. w. bemerkt man dasselbe, d. h. die stärker an-»gegriffene Platte zeigt — *E*; wie darf man sich also »wundern, dafs dasselbe auch bei Platten verschiedener

---

*) Durch analoge Versuche beweist man auch die Unzulänglichkeit der thermoelectrischen Ansicht *Nobili's*: dafs der Strom stets vom wärmeren Metall zum kälteren ströme. Setzt man nämlich das erwärmte Wasser eines Recipienten mit dem kalten eines andern durch einen nassen Papierstreifen in Verbindung; so sieht man, dafs der electrische Strom bald von der heifsen Flüssigkeit zur kalten, bald von der kalten zur erwärmten geht, je nachdem die electro-positive Platte des *Volta*'schen Elementes in der erwärmten oder in der kalten Flüssjgkeit steht.

»Natur geschieht, oder wie kann man daraus eine Fol-»gerung zu Gunsten der Berührungstheorie ziehen?«

Was würde aber *La Rive* entgegnen, wenn irgend ein Verfechter der *Volta*'schen Ansicht das gebrauchte Argument umkehren, und etwa so schliefsen würde: Weil es *sowohl* bei gleichartigen *als* bei ungleichartigen Metallen geschehen kann, dafs bald das stärker, bald das schwächer angegriffene — *E* zeigt, so kann man aus allen dergleichen Facten durchaus keine Folgerung zu Gunsten der electrochemischen Theorie ziehen. Vielleicht, wird dieser Verfechter hinzufügen, eher eine dagegen.

Vielleicht hat *La Rive* selbst seine Beweisführung nicht für ganz zureichend gefunden, wenigstens beschäftiget er sich unmittelbar darauf, eine Erklärung dieser seiner Ansicht widersprechenden Phänomene zu geben, und zwar eine geistreiche Erklärung — diefs räumen wir ein — und die auch das beweist, dafs wenigstens der Urheber der electrochemischen Theorie die festeste Überzeugung von ihrer Statthaftigkeit hat. Doch hören wir ihn selbst:

»Man kann,« sagt er, »über diese anscheinen-»den Anomalien leicht Rechenschaft geben, wenn »man bedenkt, dafs die beiden electrischen Grundstoffe, »die durch Einwirkung der Salpetersäure sich auf der »Oberfläche des in diese Säure getauchten Metalls von »einander trennen, sich entweder *unmittelbar* wieder »vereinigen oder zu diesem Ende *einen Kreislauf begin-»nen* können. In dem fraglichen Falle bewirkt die Leich-»tigkeit, mit der die Electricität vom Metall in die Sal-»petersäure übergeht, und die Schwierigkeit, mit der »sie beim Übergange vom Metall in die Schwefelsäure »zu kämpfen hat, dafs der gröfste Theil der Grundstoffe »sich *unmittelbar* wieder vereiniget, und nur ein klei-

»ner Theil den Kreislauf beginnt. Aus demselben Grunde »durchlaufen die beiden an der Oberfläche des in der »Schwefelsäure stehenden Metalls getrennten Grund»stoffe, die durch die chemische Einwirkung, der eine »in die Säure, der andere in das Metall überführt wer»den, gröſstentheils den weiteren aber minder schwie»rigern Weg, den ihnen die Peripherie des Kreises dar»bietet, weil sie hier nur den leichten Übergang vom »Metall in die Salpetersäure zu bestehen haben, wäh»rend bei directer Wiedervereinigung sie vom Metall »in die Schwefelsäure übergehen müſsten. Und darum, »wiewohl auch hier durch die Einwirkung der Schwe»felsäure auf das Metall sich weniger Electricität ent»wickle, als durch die der Salpetersäure, gewinne der »durch die erste Säure hervorgebrachte Strom (jener »Theil der Electricität, welcher den Kreislauf einschlägt) »über den durch die zweite erregten die Oberhand, und »bestimme so die von der Hauptrichtung des Stromes »abhängenden Anzeigen des Instruments.«

In dieser Erklärung ist nun zwar, für gewöhnliche Verstandeskräfte, manches unverständlich. *Zuerst,* wie es denn eigentlich möglich sey, daſs die durch die chemische Einwirkung getrennten Grundstoffe, beim Fortbestehen der Ursache ihrer Trennung an demselben Orte, wo diese waltet, sich *unmittelbar* wieder vereinigen. *Zweitens,* wie man denn sagen könne, die durch die Schwefelsäure zersetzten Grundstoffe brauchten zu ihrer Wiedervereinigung nicht durch die — wohl gemerkt, ein Glied der Kette ausmachende — Schwefelsäure zu gehen. Denn entweder stellt man sich vor, daſs der in die Säure übertragene Theil der beiden Grundstoffe dort ruhig abwartet, bis der andere die Kette durchlaufende bei ihm eintrifft, und dann muſs der letztere den Übergang von der Salpeter- in die Schwefelsäure bestehen,

oder man meint, daſs sich beide Principien in der Salpetersäure begegnen, und dann muſs der erste Grundstoff die Schwefelsäure durchströmen; in keinem Falle kann man beide Principien von diesem so mühevollen Übergange dispensiren. *Drittens* bleibt es räthselhaft, warum denn, da beide Metalle sich mit gleichartiger Electricität laden, die schwächere derselben vorwalten soll. Denn entweder besteht der Unterschied der Electricität beider Metalle bloſs in der Menge, und dann besitzen beide dieselbe Spannung, und es findet folglich gar kein Strom Statt, oder der Unterschied erstreckt sich auch auf die Spannung; dann aber muſs jenes Metall, dessen Spannung stärker ist, vorwalten, welche Hindernisse auch der Electricität im Wege stehen.

Allein daſs uns so manches unverständlich geblieben, kann uns höchstens an einer gründlichen Würdigung dieser Erklärung *La Rive's* hindern, erlaubt wird es immerhin seyn, die Sache wenigstens oberflächlich zu betrachten.

Stellen wir einmal das Zinn in Salpeter-, und das Kupfer in concentrirte oder verdünnte Schwefelsäure; auch in diesem Falle müſste, wenn die Erklärung *La Rive's* die wahre ist, die Leichtigkeit der unmittelbaren Zusammensetzung der beiden Grundstoffe in der Salpeter-, und die Schwierigkeit dieser Wiedervereinigung in jener Flüssigkeit, in der sich das Kupfer befindet, im Zink $-E$, im Kupfer $+E$ erzeugen — leider erfolgt das Gegentheil.

Es ist zu bedauern, daſs in den angeführten Auszug nicht auch die Versuche aufgenommen sind, durch welche *La Rive* geradezu bewiesen hat, daſs wenn die Leichtigkeit des Überganges auf beiden Seiten gleich ist, das Kupfer wie gewöhnlich $+E$, und das Zink $-E$ erhält; es wäre nicht uninteressant, diese Versuche zu wieder-

holen, insbesondere da trotz allen Bemühungen *Marianini's*, den beiden Flüssigkeiten eine gleiche Leitfähigkeit zu ertheilen, und trotz den mannigfachsten Modificationen ihrer Leitfähigkeit und sonstigen Beschaffenheit, es ihm nie gelingen wollte, im Kupferzink- oder in was immer für einem andern, z. B. in einem Messingzink-, Eisenzink-, Zinnzink-Elemente einen der *Volta*'schen Ansicht widersprechenden Strom hervorzurufen *).

8. Es möge hier noch eine Erfahrung Platz finden, die aus zwei Versuchen *Becquerel's* hergeleitet worden ist. Letzterer hat nämlich entdeckt, daſs ein wohl polirter Zinkstreifen in Berührung mit einer salpetersauren Zinklösung $-E$ bekömmt, so oft man in die Auflösung einen Tropfen Salpeter- oder Schwefelsäure gieſst, und daſs Eisen in Berührung mit einer Lösung von Eisenvitriol $+E$ erhält, wenn man in diese Auflösung einen Tropfen Schwefelsäure bringt.

Marianini vereinigte nun beide Versuche, setzte die Eisen- und die Zinkplatte mittelst des Multiplicatordrahtes, die salpetersaure Zink- und schwefelsaure Eisenlösung mittelst eines mit destillirtem Wasser durchnäſsten Asbeststranges in Verbindung, und tröpfelte nun gleichzeitig in die salpetersaure Zinklösung Salpe-

---

*) Übrigens wäre es eben nichts Unmögliches, eine Flüssigkeit zu finden, die in einem Kupferzink-Plattenpaare einen dem gewöhnlichen entgegengesetzten Strom zu erregen vermöchte; man brauchte zu dem Ende bloſs eine Flüssigkeit aufzusuchen, die im Kupfer dieselbe Veränderung hervorbrächte, welche der electrische Strom an demselben hervorbringt, und die wir bereits besprochen haben. Hat *La Rive* einen dergleichen Leiter gefunden, so ist ihm um diese Entdeckung Dank zu wissen, aber zu Gunsten der electrochemischen Ansicht beweist sie dennoch nichts.

ter-, in die schwefelsaure Eisenlösung Schwefelsäure. Ist nun die chemische Wirkung der Grund des electrischen Stromes, so mufs der Strom vom Zink ($-E$) zum Eisen ($+E$) gehen; allein es fand das Gegentheil Statt, das Eisen zeigte $-E$, das Zink $+E$. Diese Thatsache beweist *zum wenigsten*, dafs aufser den chemischen Wirkungen es noch eine andere, und im gegenwärtigen Falle kräftigere Ursache des electrischen Stromes gebe. Dieser Versuch wurde übrigens mannigfach, sowohl in Betreff der Stärke der Salzlösungen als der Menge der hinzugetröpfelten Säure abgeändert; aber stets ergaben sich dieselben Resultate, blofs die Intensität war verschieden.

Doch noch einem Einwurf ist zu begegnen. Man nimmt nämlich, nach der electrochemischen Ansicht, gewöhnlich an, dafs das stärker angegriffene Metall im Verhältnifs zum schwächer angegriffenen $+E$ zeigt, und könnte nun bei dem angeführten Versuche sagen: dafs wiewohl die *absolute* chemische Wirkung der Flüssigkeiten auf die Metalle einen Strom vom Zink zum Eisen erregt hätte, doch durch die *relative* chemische Wirkung, d. i. weil das Zink stärker angegriffen wird, als das Eisen, die Richtung des Stromes in die entgegengesetzte verwandelt worden wäre. Allein *Marianini* verdünnte die salpetersaure Auflösung, in welcher die Zinkplatte stand, so sehr als möglich, und gab hingegen zur schwefelsauren Lösung, in welcher das Eisen stand, äusserst viel Säure hinzu, so dafs die Schwefelsäure in einem einige tausend Male concentrirterem Zustande als die Salpetersäure sich befand, und dafs daher das Eisen offenbar viel stärker angegriffen wurde, als das Zink: jedoch die Richtung des Stromes war und blieb dieselbe. Also auch die relative chemische Wirkung konnte keinen erklecklichen Erfolg gehabt haben. Ja nicht einmal der Reaction der Säuren auf einander selbst kann

die Entstehung des electrischen Stromes zugeschrieben werden, da, wie ebenfalls *Becquerel* entdeckt hat, sich die Salpetersäure in Berührung mit Schwefelsäure negativ electrisirt.

III.

Da nach der electrochemischen Theorie die Electricität der *Volta*'schen Apparate bloſs von der verschiedenen Wirkung der Flüssigkeiten auf die Metalle erzeugt wird, und die Berührung zwischen den heterogenen Platten nur dazu dient, den Übergang der Electricität zu erleichtern: so kann man leicht auf den Gedanken kommen, daſs man in einem zusammengesetzten Apparat auch Electricität erzeugen könnte, ohne Zwischenkunft einer unmittelbaren Berührung.

So richtete *Marianini* einen Becherapparat von sechs Plattenpaaren her, wo er sich als Flüssigkeit stark gesalzenen Wassers bediente, bog aber, statt die Kupferan die Zinkplatten zu löthen, das aus dem Becher hervorragende Stück jeder Platte um, und setzte sie dadurch mit einander in Verbindung, daſs er sie paarweise in (sechs) Schalen voll Quecksilber tauchte. Die durch diesen Apparat hervorgebrachten electrischen Spannungen, die Einwirkungen auf die Geschmacksnerven und die Abweichungen der Nadel waren, wie voraus zu sehen, dieselben, wie wenn die Platten jedes Paares an einander gelöthet worden wären. Allein wie man an die Stelle des die metallinische Verbindung herstellenden Quecksilbers reines Wasser brachte, so verschwanden die Spannungen und die andern electrischen Zeichen gänzlich.

Zwar greift — wenigstens nach der electrochemischen Theorie — das reine Wasser Zink stärker als Kupfer an, man hätte also hier zwei Electromotoren von

einer gleichen Elementenzahl und ganz entgegengesetzter Richtung, und könnte *Marianini's* Versuche entgegen stellen, daſs obgleich die chemischen Wirkungen der beiden Flüssigkeiten auf die Metalle von ungleicher Stärke sind, doch die erzeugten electrischen Spannungen einander gleichen, und da sie einander entgegengesetzt sind, die electrischen Ströme sich wechselseitig aufheben müssen. Allein rührt wirklich die Electricität von der chemischen Einwirkung her, wie kann man da von Gleichheit der Spannung reden, wo diese Wirkungen von so ungleicher Stärke sind? Und umgekehrt, wie erklärt denn die electrochemische Theorie, daſs falls nun die Anzahl der Platten des *Volta*'schen Apparates dieselbe bleibt, es gar keinen Unterschied in der Spannung mache, ob man nun die Metalle in die eine oder in die andere Flüssigkeit, in verdünnte Salpeter- oder in Blausäure, in destillirtes Wasser oder in Alkohol taucht, oder den feuchten Leiter mit Scheiben aus salpetersaurem Sodium ersetzt?

Je entscheidender ein Argument ist, desto mehr verdient es geprüft zu werden. Wir haben daher zu untersuchen, ob denn wirklich Säulen aus derselben Anzahl Plattenpaare, jedoch in verschiedenen Leitern, genau dieselbe Spannung zeigen, und ob denn die Anzeigen eines mit dem Condensator in Verbindung gesetzten Electrometers genau genug sind, um jede, auch die kleinste Differenz anzugeben. Bewegen doch eilf Paare einer *Volta*'schen Säule, die aus theils polirten, theils matten Kupferstreifen zusammengesetzt ist, den Goldstreifen des Electrometers nicht im mindesten, während der Multiplicator eine Abweichung von mehreren Graden zeigt, und auf gleiche Weise könnten daher in den Spannungen der Metalle bei einer verschiedenen chemi-

schen Einwirkung der umgebenden Flüssigkeit Unterschiede obwalten, die kein Electrometer anzeigt.

Zur Aufhellung dieses Umstandes wandte *Marianini* zwei Apparate an, jeden von vier Zink-Kupfer-Elementen, den einen mit einer gesättigten salzsauren Sodiumlösung, den andern mit Regenwasser. Der erste lenkte den Multiplicator um 30°, der zweite um 6° ab. Die beiden Apparate wurden nun in Verbindung gesetzt, aber so, daſs die beiden Ströme in entgegengesetzter Richtung strömten, jedoch der Multiplicator gab gar keine Anzeige mehr. Wäre nun ein Unterschied in der Spannung vorhanden gewesen, so hätte der Multiplicator ihn anzeigen müssen. Wir können also aus dem Nichtseyn der Folge auf das Nichtseyn des Grundes zurückschlieſsen, und das Daseyn eines wie immer gearteten Unterschiedes in der Spannung electrischer Körper in verschiedenen Flüssigkeiten geradezu abläugnen.

Ich glaube nicht, daſs irgend ein Verfechter *La Rive's* den Einwurf dadurch wird beseitigen können, daſs er vorgibt, in diesen und ähnlichen Versuchen übten die angewendeten Flüssigkeiten auf die Metalle gar keine chemische Wirkung aus; denn woher käme sonst die Electricität, die sich bei der Anwendung einer dieser Flüssigkeiten allein zeigt? Aber könnten nicht trotz der verschiedenen chemischen Kraft der Flüssigkeiten die von ihnen erzeugten Spannungen dennoch gleich stark seyn? Gut, fragt man dagegen, aber wie erklärst du das? worin hat diese Anomalie, denn das bleibt sie nach der electrochemischen Ansicht sicher, ihren Grund? Vermehrt etwa eine Steigerung der chemischen Kräfte bloſs die Menge der entwickelten Electricität, ohne ihre Spannung zu ändern, gleichwie es die Vermehrung der Berührungspuncte thut? Diese Annahme ist wohl zulässig, wenn in den beiden Flüssigkeiten die auf die Me-

talle wirkende Substanz dieselbe, und bloſs ihre in der Auflösung enthaltene Menge verschieden ist; allein sie ist durchaus nicht anwendbar, wenn es sich um zwei Flüssigkeiten ganz verschiedener Natur handelt. Denn wie z. B. könnte man annehmen, daſs die durch die Einwirkung des reinen Wassers auf Kupfer und Zink entwickelte electrische Spannung jener gleich komme, welche durch die Einwirkung eines Salzes, Alkali's oder einer Säure auf dieselben Metalle entwickelt wird!

Gegen diesen meinen auf der Beständigkeit der electrischen Spannung der Säule in den verschiedensten Flüssigkeiten gebauten Beweisgrund könnte ein Anhänger der neuen Lehre noch den Einwurf machen: daſs die in jedem Elemente der *Volta*'schen Säule eintretende Veränderung des electrischen Gleichgewichtes nicht aus der mehr oder minder starken Einwirkung der Flüssigkeit auf die Metalle, sondern aus dem Unterschiede, der zwischen der Einwirkung auf das eine und der auf das nächste Metall obwaltet, seinen Grund habe, und daſs da dieser Unterschied stets derselbe bleibt, da auch bei was immer für einer Macht der Flüssigkeit die Spannung des Apparates sich nicht verändere.

Es dürfte den Erfinder dieses Einwurfes beleidigen, wenn man ihm entgegnete: falls er die Beständigkeit in der Differenz der chemischen Wirkungen nur durch die Beständigkeit der electrischen Spannungen darzuthun vermag, so leide seine ganze Theorie an einem *circulus vitiosus*; lieber wollen wir ihm einen Versuch anführen, bei welchem, ungeachtet die Differenz der chemischen Einwirkung auf die zwei Metalle nicht dieselbe blieb, doch die Spannungen sich nicht im geringsten änderten.

Acht Gläser destillirtes Wasser und acht Gläser verdünnte Schwefelsäure wurden, ein Glas Wasser mit einem Glase Säure abwechselnd, hinter einander gestellt,

die Zinkplatte eines *Volta*'schen Elementes in das erste Glas Wasser, seine Kupferplatte in das erste Glas Schwefelsäure, die Zinkplatte eines zweiten Elementes in das zweite Glas Wasser, die Kupferplatte in das zweite Glas Säure u. s. f. gebracht; das erste Glas Säure mit dem zweiten Glase Wasser, das zweite Glas Säure mit dem dritten Glase Wasser u. s. w. durch Asbeststränge in Verbindung gesetzt. Man hatte also einen Electromotor von acht Plattenpaaren, dessen Zinkplatten in Wasser, und dessen Kupferplatten in Schwefelsäure standen. Und doch zeigte er ganz dieselbe Spannung wie ein anderer ähnlicher Apparat, in dem alle Gläser mit destillirtem Wasser gefüllt waren. Nun ist doch offenbar der Unterschied zwischen der chemischen Wirkung des Wassers auf Zink und des Wassers auf Kupfer nicht gleich dem Unterschiede zwischen der Wirkung des Wassers auf Zink und der Schwefelsäure auf Kupfer. Woher also bei dieser Ungleichheit der Unterschiede der chemischen Wirkungen die Gleichheit der Spannungen?

9. Über den Einfluſs der Zahl der Elemente auf die Wirkungen der Säure gibt die electrochemische Theorie *La Rive's* auf eine sinnreiche Weise Aufschluſs.

»Die beiden an den zwei Polen der Säule angehäuf»ten electrischen Principien,« sagt *La Rive*, »suchen »sich gegenseitig zu neutralisiren, und wenn die Pole »nicht durch einen Leiter verbunden sind, so dient ih»nen die Säule selber als solcher. Daher kann keine der »beiden Electricitäten eine gewisse Spannung überschrei»ten, deren Gröſse von der geringeren oder gröſseren »Leichtigkeit abhängt welche der *Volta*'sche Apparat »dem Durchgange der beiden Fluida gewährt. Nun ist »aber erwiesen, daſs je gröſser die Anzahl der Platten »ist, desto mehr auch der Widerstand wächst und der

»Durchgang erschweret wird, daher auch die Spannung »mit der Anzahl der Plattenpaare zunehmen wird.«

Vorerst erlaube man uns eine Frage: Findet dieses Streben zur Neutralisation auf zwei Wegen, dem einen durch den Electromotor und dem andern durch den die Pole verknüpfenden Leiter bloſs in der zusammengesetzten, oder findet er auch in der einfachen Kette Statt? Gibt man das Letztere zu, so muſs man uns schon eine zweite Frage verzeihen: Warum schlagen denn die beiden Electricitäten, statt den feuchten Leiter zu durchströmen, den ihnen offenen, und ungleich besser leitenden, durch die Metalle ein? — Schneidet man, vielleicht eben wegen der jetzt gezogenen Folgerung, den einfachen Electromotoren den einen der zwei Wege durch einen Machtspruch ab, so muſs man schon die Mühe auf sich nehmen, uns zu erklären: auf welche Weise denn im zusammengesetzten Apparat eine Eigenschaft entstehe, die den Elementen, aus denen er besteht, nicht eigen ist.

Hierauf erwiedern nun die Chemo-Electriker: Die Menge der durch den einfachen Electromotor entwickelten electrischen Fluida ist äuſserst beträchtlich; der gröſste Theil schlägt freilich den metallinischen Weg zu seiner Wiedervereinigung ein, allein es bleibt noch immer genug Electricität übrig, die sich durch den feuchten Leiter fortbewegen muſs. Hingegen bei der Verbindung mehrerer Plattenpaare wachse die Spannung so sehr, daſs die Menge, die in diesem Falle durch den Electromotor selber strömen könnte, sich verringert.

Aber, müssen wir erstens in Erinnerung bringen, das Abwechseln feuchter und metallinischer Leiter kann zwar allerdings die Menge der Electricität verringern, die in einer gegebenen Zeit den Apparat durchströmt,

allein sie kann durchaus nicht, auch nur im geringsten, die Spannung des Apparates verändern. Ferner wenn, wie diese Ansicht voraussetzt, bei geschlossener Kette zwei Ströme obwalten, die der bisher beobachteten Richtung gerade entgegengesetzt sind, warum hat man noch nicht die geringste Spur hievon entdeckt? Wir wissen, daſs wenn man die Kette schlieſst, die Kraft der Säule wegen der Wirkung, welche der Strom auf die Platten übt, sich vermindert, und daſs, wenn man die Säule durch einen entgegengesetzten Strom durchströmen läſst, ihre Kraft gesteigert wird. Warum also wird, wenn man die Kette durch einen noch unvollkommenern Leiter, als die Säule selber ist, schlieſst, z. B. durch eine *Ritter*'sche Ladungssäule von mehr Platten, als der Electromotor selber zählt, die Kraft des letzteren, statt (durch den entgegengesetzten Strom) gesteigert zu werden, immer schwächer?

Aus dem Gesagten folgt, daſs entweder die erwähnten entgegengesetzten Ströme gar nicht Statt finden, oder daſs wenigstens das falsch ist, was in der erwähnten Abhandlung *La Rive's* steht: »Daſs das »Verhältniſs der Electricität, welche durch den die »Pole der Säule verknüpfenden Leiter geht, zu jener, »welche die Säule selber durchströmt, von dem Ver»hältnisse der Leitungsfähigkeit des Leiters und der »Säule abhänge.«

Und dann, wie soll man annehmen, daſs die beiden electrischen Principien in die Säule zurück zu strömen suchen, um sich in ihr zu neutralisiren, da doch das eigentliche Wesen dieses Apparates eben in seinem Streben besteht, die beiden Electricitäten aus einander zu halten, und die eine Electricität am positiven, die andere am negativen Pole anzuhäufen?

Und endlich, wenn man die Erklärung *La Rive's*

annimmt, so sollte man nie mittelst eines Condensators eine Spannung am Pole entdecken können; denn wie groſs auch die Anzahl der Plattenpaare der Säule ist, so bietet sie doch immer dem electrischen Fluidum einen viel bessern Leiter an, als die isolirende Schichte des Condensators ist. Doch nehmen wir an, daſs die wie immer geartete Leitungsfähigkeit des Condensators hinreiche, oder daſs seine Capacität die schlechtere Leitung ersetze: in diesem Falle können wir wenigstens einigermaſsen Rechenschaft geben, warum die Spannung eines Apparates dieselbe bleibt, wie auch immer die Beschaffenheit des flüssigen Leiters sich ändert. Denn wenn man eine Flüssigkeit anwendet, welche die Metalle stärker angreift, so erhält man nach der electrochemischen Theorie zwar eine gröſsere Spannung, allein da diese Flüssigkeit auch ein besserer Leiter ist, so kann das electrische Fluidum leichter in dasselbe zurückströmen, und die Spannung nimmt daher wieder ab; daher an den Polen die Anzeigen des Condensators dieselben bleiben müssen.

Indessen zeigt auch diese neue Hypothese sich unzureichend, um einige Versuche, die leicht zu erdenken waren, zu erklären.

So blieb die Spannung eines Becherapparates in Regenwasser dieselbe, es mochte die Oberfläche der zwischen den einzelnen Platten stehenden Flüssigkeit auf das Fünf- bis Sechsfache vergröſsert werden, obgleich doch hiedurch die Schwierigkeit des Zurückströmens der Electricität in den Apparat bedeutend gesteigert worden war. Bei einem Becherapparat, der an einem mit einem Condensator versehenen Electrometer eine Spannung von 12° anzeigte, wurden zwischen die einzelnen Elemente sechs Gläser mit Wasser, die unter sich und mit den Elementen durch kleine Kupferbögen

communicirten, gestellt, so daſs man einen Apparat von 56 Paaren hatte, von denen bloſs 8 wirksam, und die 48 übrigen bloſs Abwechslungen nasser und metallinischer Leiter waren, die, wie bekannt, den Durchgang des electrischen Fluidums auſserordentlich erschweren; aber die Spannung war noch immer 12°, nicht mehr, nicht weniger. Statt 48 wurden 80 solche Wechsel von nassen und metallinischen Leitern eingeschoben, hierdurch wurde der Strom so verzögert, daſs er keinen Geschmack auf der Zunge, keine Zuckungen am Frosche, keine Abweichung am Multiplicator mehr hervorbrachte; jedoch die Spannung war um nichts gewachsen. Die Wechsel wurden bis auf 310 vermehrt, allein die Spannung vergröſserte sich nicht, veränderte sich auch dann nicht, wenn man statt des Meerwassers, das in den Schalen sich befand, sich einer schlechter oder besser leitenden Flüssigkeit bediente.

Es wurden ähnliche Versuche mit Apparaten von fünf, drei und zwei Elementen angestellt, einmal die 310 Wechsel zwischen zwei Elementen angebracht, und doch änderte sich die Spannung der beiden Elemente nicht im Geringsten. *Folglich* kann die Gröſse der Spannung nicht von der Leichtigkeit des Durchganges der Electricität durch den *Volta*'schen Apparat abhängen, *folglich* existiren die von *La Rive* erdachten rückgängigen Ströme entweder gar nicht, oder sie üben wenigstens keinen Einfluſs auf die Spannung der Electromotoren.

Das Phänomen der Wasserzersetzung wird von *La Rive* ebenfalls in der Voraussetzung der beiden Straſsen der zwei Electricitäten auf der Reise zu ihrer Wiedervereinigung erklärt. Ändert sich das Verhältniſs zwischen der Leitfähigkeit des Leiters zu jener der Säule, so muſs jener Theil der Electricität, welcher den Leiter selbst durchströmt, gleichmäſsig variiren, und folglich auch, nach *La Rive*, die zersetzende Kraft des Apparates. Indeſs kann man aus folgendem Versuche ersehen, daſs die Sache sich nicht immer so verhält.

Ein Becherapparat von 80 Elementen zersetzte Wasser ziemlich schnell mittelst zweier an den zwei Polen befindlichen, und in eine gekrümmte Röhre voll Wasser getauchten Platindrähte. Man setzte dem Apparate

zwanzig unthätige Elemente zu, wie in dem Versuche des vorigen Paragraphs. Die Zersetzung ging weit weniger schnell vor sich, obgleich die Kette lange Zeit genug offen gehalten wurde, um daſs der Apparat die während des Schlusses der Kette verlorene Kraft hätte wieder erhalten können. Noch langsamer ging die Entwickelung vor sich, wenn man der Säule 20 andere unwirksame Elemente hinzusetzte, und endlich nach Hinzugabe von 60 andern ähnlichen Paaren ging die zersetzende Kraft fast ganz verloren. Nun aber hatte sich die Leitungsfähigkeit des Apparates doch sicherlich vermindert, die des Leiters war dieselbe geblieben, warum also strömte die Electricität nicht jetzt reichlicher durch den Leiter ab, und warum ging folglich die Wasserzersetzung nicht rascher vor sich? Warum erfolgte vielmehr das Gegentheil? — Wir antworten: weil die Wasserzersetzung unter die Reihe jener Phänomene gehört, die nicht bloſs von der Spannung, sondern auch von der Geschwindigkeit des electrischen Stromes abhängen; folglich wenn unter übrigens gleichen Umständen die eine oder die andere dieser beiden Bedingungen verschwindet, auch die zersetzende Kraft des Apparates schwächer wird.

Oder wie will *La Rive* mit seiner Ansicht das Factum vereinigen, daſs wenn man einen Electromotor von 100 Elementen an drei oder vier wie immer gelegenen Puncten unterbricht, und an jeder dieser Unterbrechungsstellen einen Wasserzersetzungsapparat anbringt, die Menge des Gases, die sich in einer gewissen Zeit entwickelt, allenthalben gleich groſs ist?

10. Was wir bisher sagten, scheint dargethan zu haben, daſs die electrochemische Theorie, einen so talentvollen Vertheidiger sie auch an *La Rive* gefunden hat, doch nicht hinreiche, die mannigfachen Erscheinungen der einfachen oder zusammengesetzten Electromotoren zu erklären; man erlaube uns nur noch eine Bemerkung.

Die Ansicht *Volta's*, vielleicht ist sie auch nur Hypothese, d. h. vielleicht beruht sie nicht auf unbestreitbaren Thatsachen, oder vielleicht ist der Zusammenhang zwischen diesen Thatsachen und den Erscheinungen der Säule ein bloſs zufälliger: allein sie erklärt *alle* Phänomene, erklärt sie auf eine leichte, ungezwungene Weise,

und man räume ihr daher einstweilen den Vorzug vor der electrochemischen Theorie ein.

Was wir hier aber unter der Theorie *Volta's* verstanden haben wollen, ist nicht, wie Einige noch immer zu glauben scheinen, die Theorie der gewöhnlichen Säule, die nur specieller Fall der allgemeinen Theorie der Electromotoren ist, die *Volta* viele Jahre früher lehrte, ehe er noch die Säule entdeckt hatte. In dieser Theorie betrachtet man den durch einen Electromotor erregten Strom als die Resultirende der einfachen Ströme, welche die im Electromotor selber sich begegnenden und bekämpfenden electromotorischen Kräfte erregen, wie die Berührung der Metalle unter sich oder mit Flüssigkeiten, der Flüssigkeiten unter einander u. dgl. m. Keineswegs wird in ihr die Wirkung der Flüssigkeiten auf die Metalle als gleichgültig vernachläfsigt, sondern im Gegentheile hat *Volta* selbst durch zahlreiche Versuche zu zeigen versucht, dafs es Fälle geben kann, wo diese Wirkung mächtiger als die durch Berührung zweier Metalle erzeugte auftritt, wiewohl für gewöhnlich letztere die stärkere ist. Auf diesem Wege, indem sie die Kräfte der Electromotoren des ersten und zweiten Ranges in Übereinstimmung zu bringen suchten, wufsten die Anhänger *Volta's* ihren Apparaten die gröfstmöglichste Stärke zu verleihen. Auf diesem Principe beruhen *Zamboni's* trockene Säulen, auf ihm *Ridolfi's* Becherapparat, wo die Zinkplatten in einer alkalinischen Lösung, die Kupferplatten in einer verdünnten Säure stehen. Auf ihm beruht *Becquerel's* Methode, Ströme von gleichbleibender Stärke zu erhalten, indem er die durch die Berührung der Metalle entstehenden Ströme mit den durch die chemische Einwirkung der verschiedenen Säuren auf die Metalle erzeugten zusammenwirken läfst.

Die Thatsache, aus der alle electrischen Phänomene abgeleitet werden können — die Physiker haben sie noch nicht gefunden. Vielleicht liegt sie in der mechanischen Wirkung der Körper, die entsteht, wenn man sie mit einander in Berührung setzt, so meint wenigstens *Configliachi*, der eifrigste unter den Schülern *Volta's*; vielleicht in der chemischen Kraft der Körper, die unter den gedachten Umständen thätig wird, so wollen *Parrot*

und *Heidmann;* vielleicht in den eintretenden Änderungen der Temperatur, nach *Dal Negro* und *Nobili;* vielleicht in dem Streben der Materie, in ihre kleinsten Theile zu zerfallen, ein Streben, das in dem Zustande der Verdünnung insbesondere hervortritt, und durch die originellen Versuche *Fusinieri's* dargethan worden ist; Versuche, die ein weites Feld eröffnen, und die uns vielleicht dereinst nicht bloſs die electrischen Phänomene, sondern alle jene, die wir gegenwärtig dem Daseyn unwägbarer oder gar hypothetisch angenommener Flüssigkeiten zuzuschreiben pflegen, bloſs als Resultate der Wirkung der kleinsten Theilchen der Körper auf einander darstellen werden. Bis dahin erheischt die Wichtigkeit der electrischen Erscheinungen, daſs man wenigstens eine Classe derselben, die der sogenannten galvanischen Electricität, mit einer sie alle umfassenden, ausnahmlosen Theorie zu umfassen vermöge; und aus diesem Gesichtspuncte verdient diese Arbeit *Marianini's* besondere Würdigung.

VIII.

Vanadium, ein neues Metall.

(Aus einem Schreiben des Hrn. *J. Berzelius* an den Herausgeber *A. B.*)

Stockholm, am 18. März 1831.

Professor *Sefström* hat im vorigen Sommer ein neues, recht interessantes Metall entdeckt, welches er Vanadium genannt hat. Es kommt in dem Eisenerz zu Taberg in Småland vor, scheint aber in demselben in so geringer Menge vorhanden zu seyn, daſs man es nicht darin gefunden hat, sondern in dem daraus verfertigten Eisen. *Sefström* zieht es aus der Frischschlacke von dem Eisenwerke Eckersholm in Småland, und hat daraus schon so viel ausgezogen, daſs man es näher hat untersuchen können. Da *Sefström's* Geschäfte ihm nicht Zeit dazu lassen, hat er mir diese Untersuchung anvertraut, die bald beendigt werden wird.

Das Vanadium ist eben so schwierig zu reduciren wie Titan, ist grau, und in andern Säuren, als Salpetersäure und Königswasser, nicht auflöslich. Sein Atomgewicht ist 855.8. Es hat drei Oxyde. Das erste ist $V + O$, verbindet sich nicht mit andern Körpern, ist ein vortrefflicher Leiter der Electricität, ein starker Electromotor, negativ-electrisch gegen Zink, schwarz, und nicht schmelzbar. Das zweite ist $V + 2O$, schwarz, nicht schmelzbar; es verbindet sich mit Säuren zu Salzen, die wasserfrei, braun, und mit Wasser schön dunkelblau sind. Mit Basen verbindet es sich ebenfalls, und gibt mit den Alkalien krystallisirbare braune Verbindungen. Das dritte $= V + 3O$ ist eine Säure, schmelzbar, krystallisirend, gelb oder roth nach Verschiedenheit des Aggregatzustandes, gibt gelbe und farbenlose Salze, theils nach verschiedenem Sättigungszustand, theils nach ungleicher Stärke der Basen; die schwächeren bringen immer gefärbte Salze hervor. Die Säure und das Oxyd verbinden sich in mehreren Verhältnissen, und werden dadurch löslich in Wasser, mit Purpur-, schön dunkelgrauer, gelbgrauer und oranger Farbe. Mit Schwefel kann das Vanadium in zwei Verhältnissen verbunden werden, und beide Stufen bringen Schwefelsalze mit Schwefelbasen hervor. Die von $V + 2S$ sind in der Auflösung eben so schön und reich purpurfarben, wie die mangansauren Salze. Die von $V + 3S$ sind rothbraun.

Dieses ist nun die gedrängte Charakteristik des neuen Metalls. *Wöhler* hat schon entdeckt, daſs das sogenannte chromsaure Blei von Zimapan in Mexiko nicht chromsaures, sondern vanadiumsaures Blei ist; ich habe Gelegenheit gehabt, dieses zu bestätigen.

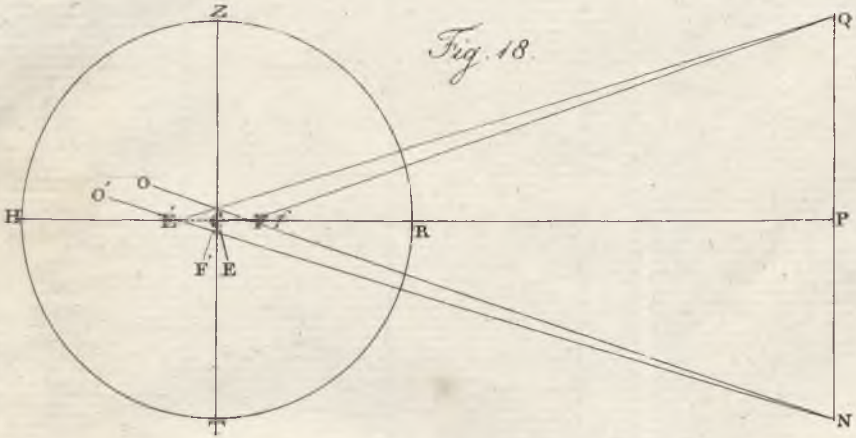


Fig. 18.

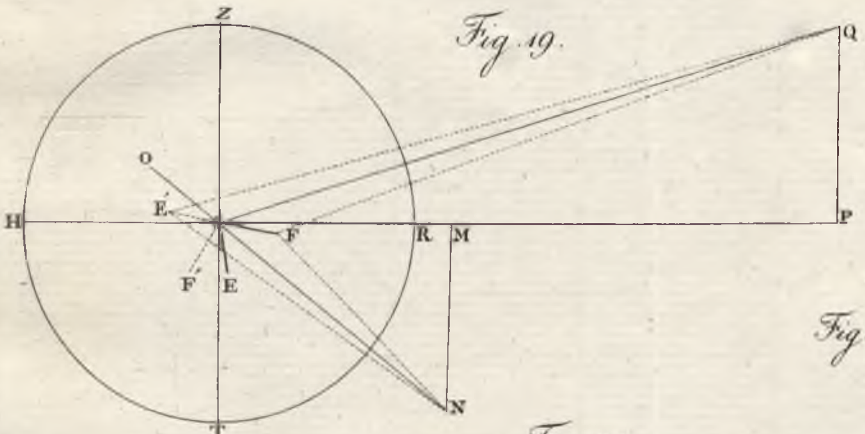


Fig. 19.

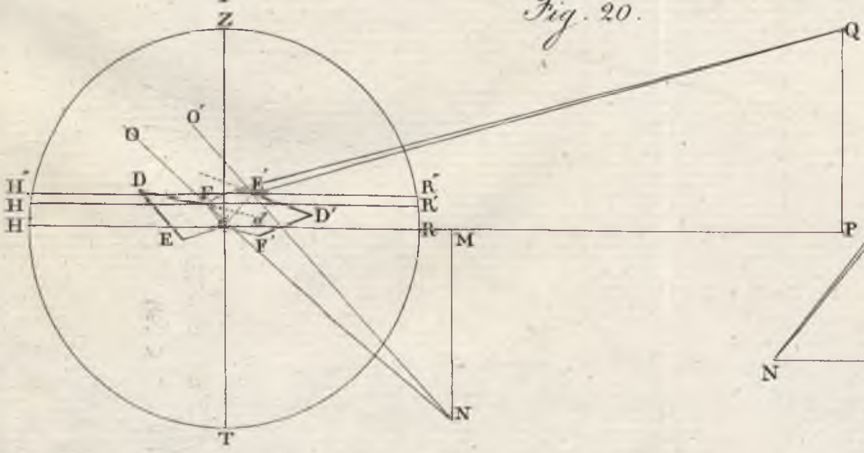


Fig. 20.

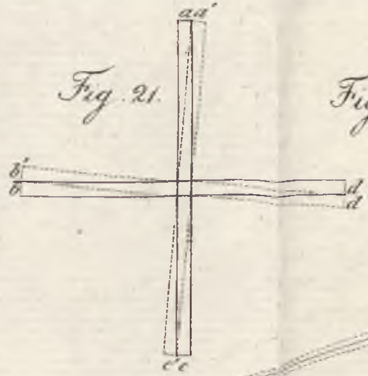


Fig. 21.

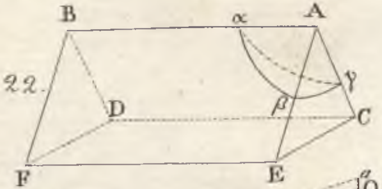


Fig. 22.

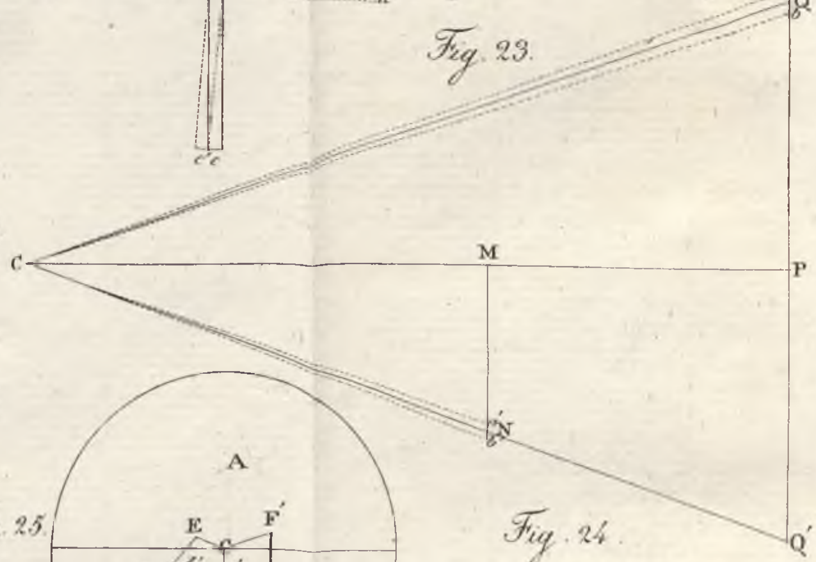


Fig. 23.

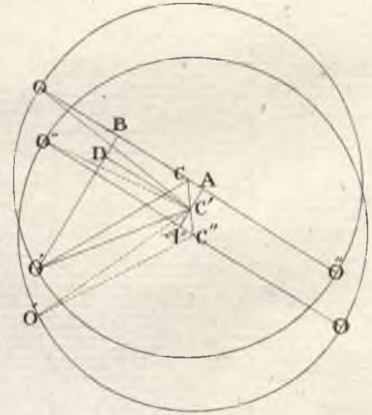


Fig. 24.

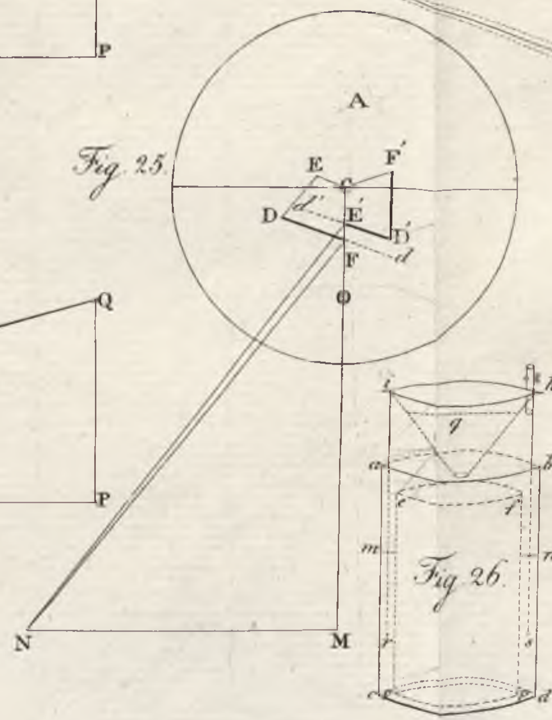


Fig. 25. Fig. 26.

A. B. sc.